

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einführung der Laplace-Transformation</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Anwendung der Laplace-Transformation auf gewöhnliche Differenzialgleichungen</b> . . . . .	<b>13</b>
2.1	Häufig auftretender Typ von Differenzialgleichungen . . . . .	13
2.2	Differenziationsregel für die Originalfunktion . . . . .	17
2.3	Rechnen mit $\delta$ -Funktionen . . . . .	22
2.4	Laplace-Transformation einer linearen Differenzialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	28
2.5	Erinnerung an die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen . . . . .	31
2.6	Rücktransformation der Partialbrüche mittels Integrations- und Dämpfungsregel der Laplace-Transformation . . . . .	37
2.7	Lösung einer Differenzialgleichung 3. Ordnung . . . . .	40
2.8	Sprungantwort einer Differenzialgleichung n-ter Ordnung bei einfachen und von Null verschiedenen Polen . . . . .	43
2.9	Sprungantwort einer Differenzialgleichung n-ter Ordnung beim Auftreten mehrfacher Pole . . . . .	50
2.10	Sprungantwort einer Differenzialgleichung 2. Ordnung . . . . .	51
2.11	Faltungsregel der Laplace-Transformation . . . . .	58
2.12	Zusammenfassung über die Lösung der Differenzialgleichung n-ter Ordnung . . . . .	65
2.13	Grenzwertsätze der Laplace-Transformation und ihre Anwendung auf Differenzialgleichungen . . . . .	67
2.13.1	Endwertsatz . . . . .	67
2.13.2	Anfangswertsatz . . . . .	69
2.14	Systeme von Differenzialgleichungen . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Lösung von Differenzengleichungen mit der Laplace-Transformation</b> . . . . .	<b>77</b>
3.1	Auftreten und Form von Differenzengleichungen . . . . .	77
3.2	Verschiebungsregeln der Laplace-Transformation . . . . .	80
3.3	Lösung einer Differenzengleichung 1. Ordnung mit Vorgeschichte . . . . .	83
3.4	Rücktransformation einer rationalen Funktion von $e^{-TS}$ . . . . .	84
3.5	Lösung der allgemeinen Differenzengleichung ohne Vorgeschichte . . . . .	86

<b>4</b>	<b>Lösung von Differenzendifferenzialgleichungen mit der Laplace-Transformation</b> . . . . .	93
4.1	Auftreten von Differenzendifferenzialgleichungen: Totzeitsysteme . . .	93
4.2	Bestimmung der Ausgangsgröße eines Totzeitsystems durch Laplace-Transformation. . . . .	98
<b>5</b>	<b>Zusammenstellung von Rechenregeln und Korrespondenzen der Laplace-Transformation</b> . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Laplace-Transformation und Übertragungsverhalten dynamischer Systeme</b> . . . . .	109
6.1	Allgemeiner Begriff des Übertragungsglieds. . . . .	109
6.2	Übertragungsfunktion . . . . .	111
6.3	Gewichtsfunktion (Impulsantwort) . . . . .	113
6.4	Charakterisierung der Übertragungsglieder mit $Y(s) = G(s)U(s)$ . . . .	116
6.5	Frequenzgang . . . . .	125
6.6	Zwei Aspekte der Laplace-Transformation . . . . .	131
<b>7</b>	<b>Etwas Funktionentheorie</b> . . . . .	133
7.1	Laurententwicklung . . . . .	133
7.2	Residuum und Residuensatz . . . . .	138
7.3	Laurententwicklung und Partialbruchzerlegung. . . . .	143
7.4	Zwei Beispiele zur Partialbruchentwicklung einer meromorphen Funktion . . . . .	146
<b>8</b>	<b>Komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation</b> . . . . .	151
8.1	Herleitung der komplexen Umkehrformel . . . . .	151
8.2	Herleitung der Multiplikationsregel für Zeitfunktionen. . . . .	157
8.3	Berechnung des Umkehrintegrals mittels des Residuensatzes. . . . .	158
8.4	Berechnung der Originalfunktion zu $e^{-z\sqrt{s}}$ . . . . .	163
<b>9</b>	<b>Anwendung der Laplace-Transformation auf partielle Differenzialgleichungen</b> . . . . .	171
9.1	Prinzipielles Vorgehen . . . . .	171
9.2	Lösung der Wärmeleitungsgleichung unter alleiniger Einwirkung der Randbedingungen . . . . .	177
9.3	Spezialfall: Randwertproblem beim einseitig begrenzten Wärmeleiter. . . . .	180
9.4	Eine andere Darstellung der Gewichtsfunktion . . . . .	183
9.5	Lösung der Wärmeleitungsgleichung unter alleiniger Einwirkung der Quellenfunktion. . . . .	185
9.6	Lösung der Wärmeleitungsgleichung unter alleiniger Einwirkung der Anfangsbedingung und allgemeine Lösung. . . . .	191

<b>10</b>	<b>Zweiseitige Laplace-Transformation und Fourier-Transformation</b>	193
10.1	Zweiseitige Laplace-Transformation . . . . .	193
10.2	Definition der Fourier-Transformation. . . . .	196
10.3	Eigenschaften der Fourier-Transformation . . . . .	205
10.4	Rechenregeln der Fourier-Transformation . . . . .	209
10.5	Korrespondenzen der Fourier-Transformation . . . . .	215
10.6	Tabellen zur Fourier-Transformation . . . . .	223
<b>11</b>	<b>Fourier-Transformation von Funktionen endlicher Breite und Abtasttheoreme</b> . . . . .	231
11.1	Komplexe Darstellung der Fourierreihe einer periodischen Funktion . .	231
11.2	Reihenentwicklung einer Zeitfunktion mit endlicher Bandbreite . . . .	234
11.3	Reihenentwicklung einer Spektraldichte zu einer Zeitfunktion von endlicher Dauer . . . . .	237
<b>12</b>	<b>Fourier-Transformation kausaler Funktionen und Hilbert- Transformation</b> . . . . .	239
<b>13</b>	<b>z-Transformation</b> . . . . .	247
13.1	Definition der z-Transformation und ihr Zusammenhang mit der Laplace-Transformation. . . . .	247
13.2	Einige Beispiele. . . . .	253
13.3	Durchführbarkeit der z-Transformation. . . . .	256
13.4	Dämpfungsregel und Differenzierungsregel für die Bildfunktion. . . .	258
13.5	Anwendung der Dämpfungsregel und der Differenzierungsregel für die Bildfunktion: z-Transformation rationaler Funktionen von $s$ . . . . .	262
13.6	Ein allgemeiner Zusammenhang zwischen $F(s)$ und $F_z(z)$ . . . . .	266
13.7	Verschiebungsregeln der z-Transformation . . . . .	268
13.8	Anwendung der Verschiebungsregeln der z-Transformation auf Differenzengleichungen für Zahlenfolgen . . . . .	270
13.9	Rücktransformation einer rationalen Funktion $G_z(z)$ . . . . .	273
13.10	Die Faltungsregel der z-Transformation . . . . .	276
13.11	Grenzwertsätze der z-Transformation . . . . .	280
13.12	Rücktransformation (Umkehrung der z-Transformation). . . . .	282
13.13	Anwendung der z-Transformation auf dynamische Systeme. . . . .	289
13.14	Zusammenstellung von Rechenregeln und Korrespondenzen der z-Transformation . . . . .	299
	<b>Übungsaufgaben</b> . . . . .	303
	<b>Lösungen der Übungsaufgaben</b> . . . . .	327
	<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	413
	<b>Sachwörterverzeichnis</b> . . . . .	417