

# Inhaltsverzeichnis

- 1 Erforderliche mathematische Grundlagen 1**
  - 1.1 Matrizen . . . . . 1
    - 1.1.1 Rechenoperationen mit Matrizen . . . . . 2
    - 1.1.2 Addition und Subtraktion zweier Matrizen . . . . . 2
    - 1.1.3 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar . . . . . 2
    - 1.1.4 Quadratische Matrix . . . . . 3
    - 1.1.5 Einheitsmatrix . . . . . 3
    - 1.1.6 Determinante . . . . . 3
    - 1.1.7 Unterdeterminante oder Minor . . . . . 5
    - 1.1.8 Adjunkte oder algebraisches Komplement . . . . . 5
    - 1.1.9 Inverse Matrix . . . . . 6
    - 1.1.10 Transponierte einer Matrix . . . . . 7
    - 1.1.11 Komplex konjugierte Matrix . . . . . 7
    - 1.1.12 Hermitesche konjugierte Matrix . . . . . 8
    - 1.1.13 Hermitesche Matrix – selbstadjungierte Matrix . . . . . 9
    - 1.1.14 Orthogonalmatrix . . . . . 9
    - 1.1.15 Unitäre Matrix . . . . . 10
    - 1.1.16 Normalmatrix – Normale Matrix . . . . . 11
    - 1.1.17 Norm einer Matrix . . . . . 11
    - 1.1.18 Konditionierte Matrixgleichung und Konditionszahl . . . . . 12
    - 1.1.19 Eigenwert, Eigenvektor . . . . . 13
    - 1.1.20 Quadratische Matrizen – eine Zusammenfassung . . . . . 15
  - 1.2 Integral-, Differenzialgleichungen . . . . . 17
    - 1.2.1 Definitionen . . . . . 17
    - 1.2.2 Differenzierung skalarer Funktionen . . . . . 18
    - 1.2.3 Gewöhnliche Differenzialgleichungen höherer Ordnung . . . . . 18

1.2.4	Partielle Differenzialgleichungen . . . . .	20
1.2.5	Partielle Integration . . . . .	22
1.2.6	Klassifikation von Differenzialgleichungen . . . . .	22
1.2.7	Anfangswertaufgabe . . . . .	23
1.2.8	Randwertaufgabe . . . . .	24
1.2.9	Lineare Operatoren . . . . .	25
1.2.10	Inneres Produkt . . . . .	27
1.2.11	Starke Form/Formulierung einer Differenzialgleichung . . . . .	30
1.2.12	Schwache Form/Formulierung einer Differenzialgleichung . . . . .	30
1.3	Vektor-Klassifikation . . . . .	31
1.4	Differenziationsregeln für Vektoren . . . . .	31
1.5	Vektoroperatoren . . . . .	32
1.5.1	Nabla- und Laplace-Operator . . . . .	32
1.5.2	Vektoroperator Gradient . . . . .	33
1.5.3	Vektoroperator Divergenz . . . . .	34
1.5.4	Vektoroperator Rotation . . . . .	35
1.5.5	Gegenüberstellung der Vektoroperatoren . . . . .	35
1.5.6	Rechenregeln für den Nabla-Operator . . . . .	36
1.5.7	Gegenüberstellung Skalar- und Vektorprodukt . . . . .	37
1.6	Maxwell'sche Gleichungen . . . . .	38
1.6.1	Beziehung zwischen Kreis- und Flächenintegral . . . . .	38
1.6.2	Beziehung zwischen Flächen- und Volumenintegral . . . . .	39
1.6.3	Maxwell'sche Gleichungen – Differenzialform . . . . .	40
1.6.4	Maxwell'sche Gleichungen – Integralform . . . . .	40
1.6.5	Richtungszuordnung beteiligter Vektorfelder . . . . .	40
1.7	Dirac'sche Deltafunktion . . . . .	41
<b>2</b>	<b>Koordinatensysteme</b>	<b>43</b>
2.1	Kartesisches Koordinatensystem . . . . .	43
2.2	Zylinderkoordinatensystem . . . . .	45
2.3	Kugelkoordinatensystem . . . . .	47
<b>3</b>	<b>LCR-Parallel- und Reihenschwingkreis</b>	<b>51</b>
3.1	Schwingkreise, Impedanzen und Resonanzen . . . . .	51
3.2	Eigenfrequenz – Fehlerrechnung . . . . .	55

3.3	Spannungsverläufe LCR-Reihenschwingkreis bei Frequenzvariation . . .	56
3.3.1	Spannungsverlauf über der Induktivität . . . . .	57
3.3.2	Spannungsverlauf über Induktivität und Widerstand . . . . .	59
3.3.3	Spannungsverlauf über dem Widerstand . . . . .	61
3.3.4	Spannungsverlauf über der Kapazität . . . . .	62
3.4	Gedämpfter, erzwungener LCR-Reihenschwingkreis . . . . .	64
3.5	Gedämpfter, freier LCR-Reihenschwingkreis . . . . .	67
3.6	Ungedämpfter, freier LC-Schwingkreis . . . . .	69
3.7	Gedämpfter, erzwungener LCR-Parallelschwingkreis . . . . .	70
3.8	Gedämpfter, freier LCR-Parallelschwingkreis . . . . .	76
3.9	Ungedämpfter, freier LC-Schwingkreis . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Stromverdrängung im Leiter</b>	<b>81</b>
4.1	Stromverdrängung im Leiter – Modellbildung . . . . .	82
4.2	Stromverdrängung im Leiter – Berechnungsergebnis . . . . .	86
4.3	Stromverdrängung im Leiter – Simulationsergebnis . . . . .	87
4.4	Stromverdrängung im Leiter – Zusammenfassung . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Besselgleichung und Besselfunktion</b>	<b>91</b>
5.1	Zur Person Wilhelm Friedrich Bessel . . . . .	92
5.2	Besselgleichung des LCR-Parallelschwingkreises . . . . .	93
5.3	Besselgleichung der Felddiffusionsgleichung . . . . .	94
5.4	Besselfunktion zur Berechnung der Feldverteilung in einem Kondensator	97
5.4.1	Modellanordnung . . . . .	97
5.4.2	Herleitung der Besselfunktion . . . . .	98
5.5	Besselfunktion zur Berechnung der Flussdichteverteilung in einer Spule	101
5.5.1	Modellanordnung . . . . .	101
5.5.2	Herleitung der Besselfunktion . . . . .	101
5.6	Besselfunktion aus allgemeiner Form der Besselgleichung . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Lösung von Differenzialgleichungen mittels Green'scher Funktionen</b>	<b>109</b>
6.1	Zur Person George Green . . . . .	109
6.2	Green'sche Integralsätze . . . . .	112
6.3	PDE – Auf-, Integrationspunktanordnungen . . . . .	114
6.4	PDE – Vorbereitung zur Lösung nach Green – Differenzialform . . . . .	116
6.5	PDE – Vorbereitung zur Lösung nach Green – Integralform . . . . .	118

6.5.1	Umstellen der PDE nach der zu lösenden Variable . . . . .	118
6.5.2	Homogene Randbedingungen . . . . .	120
6.5.3	Inhomogene Randbedingungen . . . . .	121
6.5.4	Dirichlet-Randbedingungen . . . . .	121
6.5.5	Neumann-Randbedingungen . . . . .	121
6.6	PDE – Lösung der Poisson’schen DGL . . . . .	122
6.6.1	Aufgabenbeschreibung . . . . .	122
6.6.2	Lösungsweg . . . . .	123
6.7	PDE – Lösung der Laplace’schen DGL . . . . .	125
6.7.1	Aufgabenbeschreibung . . . . .	125
6.7.2	Lösungsweg . . . . .	126
6.8	ODE – Vorbereitung zur Lösung mit der Green’schen Funktion . . . . .	128
6.8.1	Homogene Randbedingungen . . . . .	130
6.8.2	Inhomogene Randbedingungen . . . . .	130
6.8.3	Kontinuitäts- und Diskontinuitätsbedingungen . . . . .	131
6.9	ODE – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (I) . . . . .	133
6.9.1	Aufgabenbeschreibung . . . . .	133
6.9.2	Lösungsweg I . . . . .	134
6.9.3	Lösungsweg II . . . . .	137
6.10	ODE – Lösung von $d^2y/dx^2 + y = \operatorname{cosec} x$ . . . . .	140
6.10.1	Aufgabenbeschreibung . . . . .	140
6.10.2	Lösungsweg . . . . .	140
6.11	ODE – Lösung von $d^2y/dx^2 + y = f(x)$ . . . . .	142
6.11.1	Aufgabenbeschreibung . . . . .	142
6.11.2	Lösungsweg . . . . .	142
6.12	ODE – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (II) . . . . .	144
6.12.1	Aufgabenbeschreibung . . . . .	144
6.12.2	Lösungsweg . . . . .	145
6.13	ODE – Lösung von $d^2u/dx^2 = x$ . . . . .	148
6.13.1	Aufgabenbeschreibung . . . . .	148
6.13.2	Lösungsweg . . . . .	148

**7 Differenzialgleichungen und Finite Elemente** **153**

7.1	Beispiele aus der Physik für Differenzialgleichungen 1’ter Ordnung . . .	153
7.2	Beispiele aus der Physik für Differenzialgleichungen 2’ter Ordnung . . .	154

7.3	Finite Elemente . . . . .	158
<b>8</b>	<b>Von der Momentenmethode zur Galerkin-Methode</b>	<b>161</b>
8.1	Grundprinzip der Momentenmethode (MOM) . . . . .	161
8.2	Anmerkungen zur Momentenmethode . . . . .	163
8.2.1	Matrix $(l_{jk})$ . . . . .	163
8.2.2	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktionen $\phi_n$ und $w_k$ . . . . .	164
8.3	Zur Person Boris Galerkin . . . . .	164
8.4	Galerkins Idee . . . . .	165
<b>9</b>	<b>Traditionelle Galerkin-Methode</b>	<b>167</b>
<b>10</b>	<b>Galerkin-Methode – Lösung von <math>du/dx = u</math></b>	<b>169</b>
10.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion . . . . .	169
10.2	Formulierung der schwachen Form mit Basis- und Wichtungsfunktion . . . . .	170
10.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung . . . . .	171
10.4	Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	171
<b>11</b>	<b>Galerkin-Methode – Lösung von <math>-d^2u/dx^2 = 4x^2 + 1</math></b>	<b>175</b>
11.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion . . . . .	175
11.2	Formulierung der schwachen Form mit Basis- und Wichtungsfunktion . . . . .	176
11.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung . . . . .	176
11.4	Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	178
<b>12</b>	<b>Galerkin-Methode – Lösung von <math>d^2u/dx^2 = -1</math> (I)</b>	<b>181</b>
12.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion . . . . .	182
12.2	Schwache Formulierung der Differentialgleichung . . . . .	182
12.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung . . . . .	183
12.4	Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	183
<b>13</b>	<b>Galerkin-Methode – Lösung von <math>d^2u/dx^2 = -1</math> (II)</b>	<b>185</b>
13.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion . . . . .	185
13.2	Formulierung der schwachen Form mit Basis- und Wichtungsfunktion . . . . .	186
13.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung . . . . .	187
13.4	Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	188

<b>14 Galerkin-Methode – Durchflutungsgesetz</b>	<b>191</b>
14.1 Galerkin-Methode – Durchflutungsgesetz Innenbereich des Leiters . . . . .	193
14.1.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung . . . . .	193
14.1.2 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixengleichung . . . . .	194
14.1.3 Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	195
14.2 Galerkin-Methode – Durchflutungsgesetz Außenbereich des Leiters . . . . .	196
14.2.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung . . . . .	196
14.2.2 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixengleichung . . . . .	197
14.2.3 Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	198
14.3 Gegenüberstellung von FEM- mit Galerkin-Ergebnis . . . . .	199
<b>15 Galerkin-FEM</b>	<b>201</b>
15.1 Galerkin-FEM – Was wird gelöst? . . . . .	201
15.2 Galerkin-FEM – Vorgehen zur Lösung . . . . .	202
<b>16 Galerkin-FEM – Lösung von <math>d^2u/dx^2 = -1</math> (I)</b>	<b>205</b>
16.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung . . . . .	206
16.2 Diskretisierung des zu lösenden Gebiets $\Omega$ . . . . .	207
16.3 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion . . . . .	207
16.4 Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$ . . . . .	209
16.5 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixengleichung . . . . .	210
16.6 Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	214
<b>17 Galerkin-FEM – Lösung von <math>d^2u/dx^2 = -1</math> (II)</b>	<b>217</b>
17.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung . . . . .	218
17.2 Diskretisierung des zu lösenden Gebiets $\Omega$ . . . . .	219
17.3 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion . . . . .	219
17.4 Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$ . . . . .	219
17.5 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixengleichung . . . . .	219
17.6 Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	220
<b>18 Galerkin-FEM – Elektrostatische Feldberechnung</b>	<b>223</b>
18.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung . . . . .	223
18.2 Diskretisierung des zu lösenden Gebiets $\Omega$ . . . . .	224
18.3 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion . . . . .	224
18.4 Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$ . . . . .	224

18.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung . . . . .	226
18.6	Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	228
<b>19</b>	<b>Galerkin-FEM – Ortsabhängige Temperaturberechnung</b>	<b>231</b>
19.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung . . . . .	231
19.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets $\Omega$ . . . . .	233
19.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion . . . . .	233
19.4	Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$ . . . . .	233
19.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung . . . . .	234
19.6	Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	235
19.7	Diffusionsvorgang vollendet . . . . .	238
<b>20</b>	<b>Galerkin-FEM – Ortsabhängige Magnetfeldberechnung</b>	<b>241</b>
20.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung . . . . .	241
20.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets $\Omega$ . . . . .	243
20.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion . . . . .	243
20.4	Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$ . . . . .	243
20.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung . . . . .	244
20.6	Lösung des linearen Gleichungssystems . . . . .	245
<b>21</b>	<b>Einführung in die Finite-Differenzen-Methode</b>	<b>251</b>
21.1	Numerische Notation der linearen Felddiffusionsgleichung . . . . .	251
21.2	Zu den Personen Crank und Nicolson . . . . .	252
21.3	Lösung mit impliziter Methode nach Crank-Nicolson . . . . .	252
21.3.1	Überführung der Diffusionsgleichung in eine Matrixgleichung . . . . .	253
21.3.2	Lösung der Matrixgleichung . . . . .	254
21.3.3	Anwendungsbeispiel . . . . .	257
21.4	Lösung mit expliziter Methode . . . . .	260
21.4.1	Überführung der Diffusionsgleichung in eine Matrixgleichung . . . . .	260
21.4.2	Lösung der Matrixgleichung . . . . .	261
21.4.3	Anwendungsbeispiel . . . . .	262
<b>22</b>	<b>Anwendungen der FEM zur Produktentwicklung</b>	<b>269</b>
22.1	Analyse eines Proportionalmagnets . . . . .	269
22.1.1	Preprocessing . . . . .	270
22.1.2	Processing . . . . .	271

22.1.3	Postprocessing . . . . .	272
22.2	Synthese eines planaren Asynchron-Scheibenläufermotors . . . . .	273
22.2.1	Preprocessing . . . . .	273
22.2.2	Processing . . . . .	273
22.2.3	Postprocessing . . . . .	274
22.2.4	Musterbau des planaren Asynchronmotors . . . . .	274
<b>23</b>	<b>Virtuelle Produktentwicklung</b>	<b>277</b>
23.1	Kopplung zwischen FEM- und Optimierungstool . . . . .	277
23.2	Mehrzielloptimierung – Pareto-Optimierung . . . . .	278
23.3	Optimierungsbeispiel Elektromagnet . . . . .	279
23.3.1	Monte Carlo-Methode . . . . .	280
23.3.2	Partikelschwarm-Methode . . . . .	282
23.3.3	Evolutionäre Methode . . . . .	282
23.3.4	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	283
<b>24</b>	<b>Eigenwertprobleme</b>	<b>285</b>
24.1	Eigenwertproblem – Einführung . . . . .	285
24.2	Eigenwertproblem – Momentenmethode . . . . .	286
24.3	Eigenwertproblem – kanonische Form . . . . .	287
<b>25</b>	<b>Eigenwertproblem-MOM – Lösung von <math>-d^2u/dx^2 = \lambda u</math></b>	<b>289</b>
25.1	Aufgabenbeschreibung . . . . .	289
25.2	Lösungsweg und Lösung . . . . .	290
25.3	Lösung für 1’ter Ordnung . . . . .	290
25.4	Lösung für 2’ter Ordnung . . . . .	294
<b>26</b>	<b>Gemeinsamkeiten von Methoden zur Lösung von DGLs</b>	<b>297</b>
26.1	Momentenmethode (MOM) . . . . .	297
26.2	Integraltransformation . . . . .	299
26.3	Green’sche Methode . . . . .	300
<b>27</b>	<b>Wissenswertes zur Modellbildung</b>	<b>303</b>
27.1	Kategorien der Modellbildung . . . . .	303
27.2	Analytik contra Numerik . . . . .	304
<b>28</b>	<b>Nützliche Normen</b>	<b>307</b>

<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>311</b>
<b>A Anhang</b>	<b>317</b>
A.1 MATLAB-Code – Wärmediffusionsskript . . . . .	317
A.2 MATLAB-Code – Magnetfelddiffusionsskript . . . . .	321
A.3 Toolvergleich – MATLAB vs. COMSOL . . . . .	327
<b>B Campus Künzelsau – Inside</b>	<b>329</b>
<b>Index</b>	<b>331</b>