

# 1

## Elektrische Gleichstromnetzwerke

Die Berechnung elektrischer Netzwerke ist ein zentrales und grundlegendes Kapitel der Elektrotechnik. In diesem Kapitel werden ausschließlich Gleichstromnetzwerke behandelt. Grundlage sind das Ohmsche Gesetz und die Kirchhoffschen Regeln. Sind in einem Netzwerk mit  $z$  Zweigen die  $z$  Zweigspannungen bekannt, lassen sich die  $z$  Zweigströme berechnen. Entsprechendes gilt für  $z$  bekannte Zweigströme, d. h. in diesem Fall lassen sich die unbekanntes  $z$  Zweigspannungen ermitteln. Die Knotenregel liefert für ein Netzwerk mit  $k$  Knoten genau  $k - 1$  linear unabhängige Gleichungen. Die restlichen  $m = z - (k - 1)$  linear unabhängigen Gleichungen lassen sich mithilfe der Maschenregel aufstellen. Ist der vollständige Baum eines Netzwerkes festgelegt, bilden die  $k - 1$  Zweige des vollständigen Baums die Baumzweige und die  $m = z - (k - 1)$  Zweige, die nicht zum vollständigen Baum gehören, die Maschenzweige oder auch Verbindungszweige. Der vollständige Baum ist dadurch charakterisiert, dass er keine geschlossenen Maschen enthält und dass alle Knoten direkt oder indirekt miteinander verbunden sind.

In diesem Kapitel werden die bekannten Lösungsverfahren

- **Maschenstromverfahren**
- **Knotenpotenzialverfahren**
- **Ersatzspannungsquelle, Ersatzstromquelle**
- **Superpositionsprinzip**

angewandt.

Auf die mathematische Herleitung der linearen Gleichungssysteme im Rahmen des Maschenstrom- und des Knotenpotenzialverfahrens wird an dieser Stelle verzichtet. Ausgehend von der Herleitung wird in diesem Kapitel für beide Verfahren eine systematische Vorgehensweise für die Aufstellung der linearen Gleichungssysteme angegeben.

Als ein sehr wichtiges Werkzeug zur Berechnung elektrischer Netzwerke werden diese beiden Verfahren in Verbindung mit der Ersatzspannungsquelle und Ersatzstromquelle angesehen. Die Ersatzspannungsquelle und die Ersatzstromquelle spielen u. a. bei dem Maschenstrom- und dem Knotenpotenzialverfahren eine wichtige Rolle, wenn Stromquellen in Spannungsquellen und umgekehrt umzuwandeln sind.

Mit dem Überlagerungssatz (Superpositionsprinzip) werden lineare elektrische Netzwerke mit mehr als einer Quelle berechnet. Das Kapitel 1 enthält u. a. Aufgaben, bei denen Kombinationen aus den oben erwähnten Lösungsverfahren zur Anwendung kommen.

Die Berechnung von elektrischen Netzwerken erfolgt in den Aufgaben 1.1 bis 1.7 mithilfe des Maschenstromverfahrens und in den Aufgaben 1.8 bis 1.14 mithilfe des Knotenpotenzialverfahrens. Die Aufgaben 1.15 und 1.16 wenden jeweils beide Verfahren an. Die Ersatzstromquelle kommt in Aufgabe 1.17 und die Ersatzspannungsquelle in den Aufgaben 1.18

und 1.19 zur Anwendung. Die Aufgaben 1.20 und 1.22 behandeln den Überlagerungssatz, während in Aufgabe 1.21 Ersatzspannungsquelle und Ersatzstromquelle den Schwerpunkt bilden.

### Systematisches Vorgehen für die Berechnung elektrischer Netzwerke mit dem Maschenstromverfahren

- Bestimmen der Anzahl  $m$  der unabhängigen Maschengleichungen:  
Es gilt:  $m = z - (k - 1)$ , wobei  $z$  die Anzahl der Zweige und  $k$  die Anzahl der Knoten darstellt.
- Umrechnen aller Stromquellen in äquivalente Spannungsquellen
- Für jede Masche ist ein Maschenstrom anzunehmen. Die Pfeilrichtung der Maschenströme erfolgt möglichst entgegen dem Uhrzeigersinn. Jeder Zweig muss in mindestens einer Masche enthalten sein; Zusammenhang zwischen fiktiven Maschenströmen und wahren Strömen herstellen.
- Für jede Masche: Aufstellung der Maschenregel:  $\sum U = 0$  und eintragen in folgendes Rechenschema:

**Tabelle 1.1** Aufstellung des Gleichungssystems

	$I_{M1}$	$I_{M2}$	$I_{M3}$	...	$I_{Mm}$	
Masche 1	$R_{11}$	$R_{12}$	$R_{13}$	...	$R_{1m}$	$U_1$
Masche 2	$R_{21}$	$R_{22}$	$R_{23}$	...	$R_{2m}$	$U_2$
Masche 3	$R_{31}$	$R_{32}$	$R_{33}$	...	$R_{3m}$	$U_3$
...	...	...	...	...	...	...
Masche $m$	$R_{m1}$	$R_{m2}$	$R_{m3}$	...	$R_{mm}$	$U_m$

Die Abkürzungen bedeuten:

$I_{Mx}$  Maschenstrom in der Masche  $x$

$U_x$  Summe aller Quellenspannungen, positiv, wenn Richtung des Maschenstromes entgegengesetzt zu den Spannungspfeilen der Quellenspannungen ist, sonst negativ

$R_{xx}$  Summe aller Widerstände in der Masche  $m$ , stets positiv

$R_{xy}$  Widerstand, der von den Maschenströmen  $I_x$  und  $I_y$  gemeinsam durchflossen wird. Positiv, wenn Pfeile der Maschenströme im Koppelzweig gleichgerichtet sind, sonst negativ.

- Kontrolle des Schemas:  
Die Koeffizienten des Rechenschemas müssen symmetrisch zur Hauptdiagonalen sein.
- Lösung des linearen Gleichungssystems, z. B. mithilfe der Cramerschen Regel

### Systematisches Vorgehen für die Berechnung elektrischer Netzwerke mit dem Knotenpotenzialverfahren

- Umrechnen aller Spannungsquellen in äquivalente Stromquellen
- Die Knoten werden durchnummeriert (von 1 bis  $n$ ) und ein Knoten als Bezugsknoten gewählt (Ziffer 0).
- Für jeden Knoten: Aufstellung der Knotenregel:  $\sum I = 0$  und eintragen in folgendes Rechenschema:

**Tabelle 1.2** Aufstellung des Gleichungssystems

	$U_{10}$	$U_{20}$	$U_{30}$	...	$U_{n0}$	
Knoten 1	$G_{11}$	$-G_{12}$	$-G_{13}$	...	$-G_{1n}$	$I_1$
Knoten 2	$-G_{21}$	$G_{22}$	$-G_{23}$	...	$-G_{2n}$	$I_2$
Knoten 3	$-G_{31}$	$-G_{32}$	$G_{33}$	...	$-G_{3n}$	$I_3$
...	...	...	...	...	...	...
Knoten n	$-G_{n1}$	$-G_{n2}$	$-G_{n3}$	...	$G_{nn}$	$I_n$

Die Abkürzungen bedeuten:

$U_{x0}$  Knotenspannungen zwischen dem Knoten  $x$  und dem Bezugsknoten 0

$I_x$  Summe aller Quellenströme, die in den Knoten fließen, negativ, wenn Strom vom Knoten wegfließt, sonst positiv

$G_{xx}$  Summe aller Leitwerte, die einseitig mit Knoten  $x$  verbunden sind (Knotenleitwert, in Hauptdiagonale)

$G_{xy}$  Leitwert zwischen Knoten  $x$  und Knoten  $y$  (Koppelleitwert, es ist  $G_{xy} = G_{yx}$ )

4. Kontrolle des Schemas:

Die Koeffizienten des Rechenschemas müssen symmetrisch zur Hauptdiagonalen sein.

5. Lösung des linearen Gleichungssystems, z. B. mithilfe der Cramerschen Regel

### Cramersche Regel zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Mithilfe der Cramerschen Regel lassen sich Gleichungssysteme mit  $n$  linearen Gleichungen und  $n$  Veränderlichen lösen.

$$[A] \cdot [x] = [y]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

wobei  $\det(A)$  die Koeffizientendeterminante der Koeffizientenmatrix  $[A]$  und  $\det(A_i)$  die Determinante der Matrix  $[A_i]$  darstellen. Die Determinante der Matrix  $[A_i]$  ergibt sich, wenn die  $i$ -te Spalte der Matrix  $[A]$  durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt wird.

Zum Beispiel für eine dreireihige Koeffizientenmatrix und den Unbekannten  $x_1, x_2$  und  $x_3$  ergibt sich für die Unbekannte  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & y_1 & a_{13} \\ a_{21} & y_2 & a_{23} \\ a_{31} & y_3 & a_{33} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 & a_{13} \\ a_{21} & y_2 & a_{23} \\ a_{31} & y_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(y_2 \cdot a_{33} - a_{23} \cdot y_3) - y_1(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13}(a_{21} \cdot y_3 - y_2 \cdot a_{31})$$

■ Maschenstromverfahren

**Aufgabe 1.1**

Das folgende lineare Netzwerk ist gegeben:

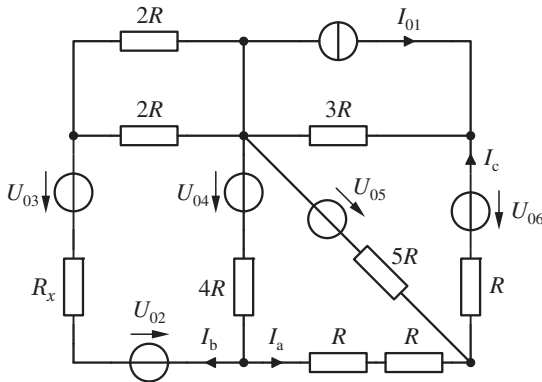


Bild 1.1.1 Lineares Netzwerk

- a) Formen Sie die Stromquelle  $I_{01}$  in die äquivalente Spannungsquelle  $U_{01}$  um und fassen Sie Widerstände zusammen, um das Netzwerk zu vereinfachen.
- b) Stellen Sie mithilfe des Maschenstromverfahrens das Gleichungssystem für die unabhängigen Ströme  $I_a$ ,  $I_b$  und  $I_c$  auf (Matrixform).
- c) Der Widerstand  $R_x$  besteht aus einem Heizdraht. Dieser hat einen Durchmesser von  $d = 0,5 \text{ mm}$ , eine Länge von  $l = 50 \text{ cm}$  und besteht aus Konstantan mit einem spezifischen Widerstand von  $\rho = 0,5 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ . Bestimmen Sie die Leistung an dem Heizdraht, wenn der Strom  $I_a = 500 \text{ mA}$  beträgt.

Gegeben ist die Lösungsmatrix eines **anderen** Netzwerkes.

$$\begin{bmatrix} 3R & 0 & 2R \\ 0 & 6R & R \\ 2R & R & 7R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_d \\ I_e \\ I_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \text{ V} \\ 15 \text{ V} \\ 20 \text{ V} \end{bmatrix}$$

Lösungsmatrix eines Netzwerkes

- d) Bestimmen Sie den Strom  $I_d$  aus der oben genannten Matrix. Der Lösungsweg soll hierbei erkennbar sein. Geben Sie auch den Zahlenwert für  $R = 100 \Omega$  an.

**Lösung zu Aufgabe 1.1**

*Hinweis:* Lineare Netzwerke bestehen ausschließlich aus linearen Elementen. Ein lineares Element zeichnet sich dadurch aus, dass der Strom der Spannung in linearer Weise folgt.

$$I = k \cdot U,$$

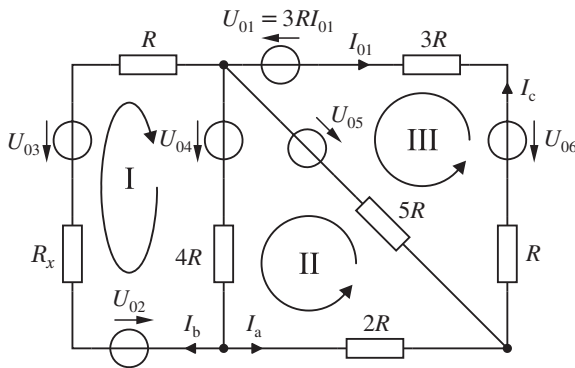
wobei  $k$  ein Proportionalitätsfaktor ist.

a) Erstellung der äquivalenten Spannungsquelle:

$3R$  ist parallel zur Stromquelle  $I_{01}$ , daher kann die äquivalente Spannungsquelle als  $U_{01} = 3R \cdot I_{01}$  geschrieben werden.

Vereinfachung des Netzwerkes:

Die Parallelschaltung aus den beiden Widerständen  $2R$  wird zu  $2R \parallel 2R = R$  vereinfacht. Die Reihenschaltung aus  $R$  und  $R$  wird zu  $2R$  vereinfacht.



**Bild 1.1.2** Vereinfachung des Netzwerkes

b)	$I_a$	$I_b$	$I_c$	Quellen
Masche I	$5R + R_x$	$4R$	0	$U_{02} + U_{03} - U_{04}$
Masche II	$4R$	$11R$	$-5R$	$U_{05} - U_{04}$
Masche III	0	$-5R$	$9R$	$U_{06} - U_{05} - U_{01}$

Die angegebene Matrix ist eine von mehreren möglichen Lösungen. Die Richtung der Maschenumläufe kann beliebig gewählt werden.

c) Berechnung des Widerstandes des Drahtes:  $R_x = \rho \cdot \frac{l}{\pi \cdot r^2} = 1,27 \Omega$

Berechnung der Leistung:  $P_{R_x} = I_a^2 \cdot R_x = \underline{0,32 \text{ W}}$

d) 
$$\det(A) = (300 \cdot 600 \cdot 700 - 200 \cdot 600 \cdot 200 - 100 \cdot 100 \cdot 300) \cdot \Omega^3$$

$$= 99\,000\,000 \Omega^3$$

$$\det(A_d) = (10 \cdot 600 \cdot 700 + 200 \cdot 15 \cdot 100 - 200 \cdot 600 \cdot 20 - 10 \cdot 100 \cdot 100) \cdot \text{V} \cdot \Omega^2$$

$$= 2\,000\,000 \text{ V} \cdot \Omega^2$$

$$I_d = \frac{\det(A_d)}{\det(A)} = \underline{\underline{0,0202 \text{ A}}}$$



b)	$I_a$	$I_b$	$I_c$	Quellen
Masche a	$R_x + R + R$	$R$	$-R$	$-U_{02}$
Masche b	$R$	$3R + R$	$0$	$-U_{01}$
Masche c	$-R$	$0$	$3R + R$	$U_{03}$

c)

$$\det(A) = 16R^2 R_x + 24R^3$$

$$\det(A_a) = R^2(4U_{01} - 16U_{02} + 4U_{03})$$

$$I_a = \frac{\det(A_a)}{\det(A)} = \frac{4U_{01} - 16U_{02} + 4U_{03}}{16R_x + 24R}$$

$$I_a = \underline{\underline{-30 \text{ mA}}}$$

d) Es wird davon ausgegangen, dass sich der Widerstandswert linear mit der Temperatur ändert.

$$R_x(T = 200^\circ\text{C}) = R_{x,20} + \alpha_{20} \cdot (T - 20^\circ\text{C})$$

$$R_x(T = 200^\circ\text{C}) = R_{x,20} \cdot (1 + \alpha_{20} \cdot (T - 20^\circ\text{C})) = \underline{\underline{169,3 \Omega}}$$

$I_a$  wird analog Aufgabenteil c) berechnet:

$$I_a(T = 200^\circ\text{C}) = \underline{\underline{-23 \text{ mA}}}$$

### Aufgabe 1.3

Das folgende lineare Netzwerk ist gegeben:

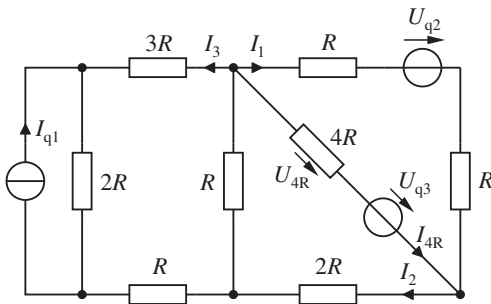


Bild 1.3.1 Lineares Netzwerk

- Formen Sie die Stromquelle  $I_{q1}$  in eine äquivalente Spannungsquelle  $U_{q1}$  um.
- Die eingezeichneten Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  sind unabhängig. Geben Sie für diesen Fall den vollständigen Baum für das umgeformte Netzwerk an.
- Stellen Sie mithilfe des Maschenstromverfahrens ein lineares Gleichungssystem für diese unabhängigen Ströme auf (Matrixform).

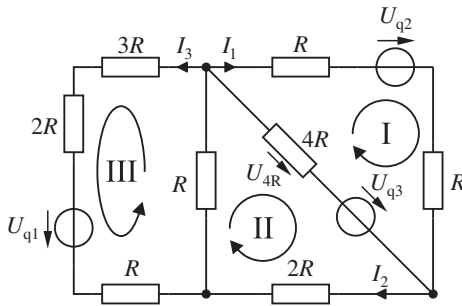
Es seien nachfolgende Werte gegeben:

$$R = 100 \Omega, \quad I_{q1} = 100 \text{ mA}, \quad U_{q2} = 10 \text{ V}, \quad U_{q3} = 30 \text{ V}$$

- Berechnen Sie die Ströme  $I_1$  und  $I_2$ .
- Berechnen Sie die Spannung  $U_{4R}$ .

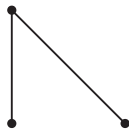
**Lösung zu Aufgabe 1.3**

a)



**Bild 1.3.2** Umwandlung der Stromquelle in eine äquivalente Spannungsquelle

b) Der vollständige Baum verbindet alle Knoten eines Netzwerkes, ohne dass eine geschlossene Masche gebildet wird. Er besteht aus  $(k - 1)$  Baumzweigen, wobei  $k$  die Anzahl der Knoten ist.



**Bild 1.3.3** Vollständiger Baum

$$c) \begin{bmatrix} 6R & -4R & 0 \\ -4R & 7R & R \\ 0 & R & 7R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +U_{q3} - U_{q2} \\ -U_{q3} \\ -U_{q1} \end{bmatrix}$$

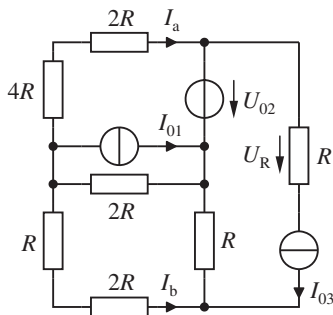
$$d) \quad I_1 = \underline{\underline{11,36 \text{ mA}}}$$

$$I_2 = \underline{\underline{-32,95 \text{ mA}}}$$

$$e) \quad I_{4R} = I_2 - I_1 = \underline{\underline{-44,28 \text{ mA}}}$$

$$U_{4R} = I_{4R} \cdot 4R = \underline{\underline{-17,712 \text{ V}}}$$

**Aufgabe 1.4**



**Bild 1.4.1** Lineares Netzwerk

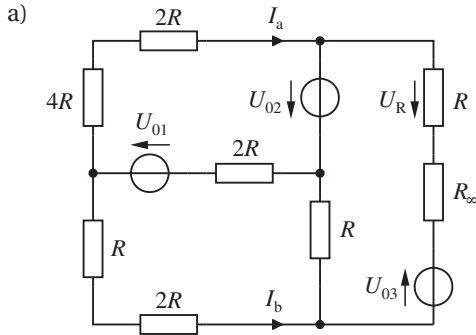
$$R = 10 \Omega, \quad I_{01} = 100 \text{ mA}, \quad U_{02} = 5 \text{ V}, \quad I_{03} = 50 \text{ mA}$$

a) Wandeln Sie alle in der gegebenen Schaltung enthaltenen Stromquellen in äquivalente Spannungsquellen um.



- b) Stellen Sie einen vollständigen Baum auf, in dem die angegebenen Ströme  $I_a$ ,  $I_b$  und  $I_{03}$  die unabhängigen Ströme darstellen.
- c) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, stellen Sie mithilfe des Maschenstromverfahrens eine Gleichung für den Strom  $I_b$  auf und berechnen Sie den Zahlenwert.
- d) Berechnen Sie den Zahlenwert der angegebenen Spannung  $U_R$ .

**Lösung zu Aufgabe 1.4**

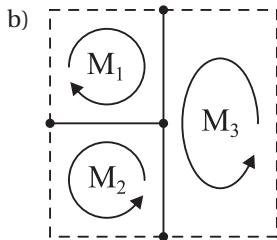


**Bild 1.4.2** Umwandlung der Stromquelle in eine äquivalente Spannungsquelle

$$U_{01} = I_{01} \cdot 2R$$

Bei Stromquellen ohne parallelen Widerstand (in dieser Aufgabe  $I_{03}$ ) wird von einem „virtuellen“ parallelen Widerstand ausgegangen. Der Widerstandswert dieses Widerstandes strebt gegen  $\infty$ .

$$U_{03} = I_{03} \cdot R_{\infty} \quad \text{mit} \quad R_{\infty} \rightarrow \infty$$



**Bild 1.4.3** Vollständiger Baum

c)

$$\begin{bmatrix} 8R & 2R & 0 \\ 2R & 6R & -R \\ 0 & -R & 2R + R_{\infty} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_{01} - U_{02} \\ -U_{01} \\ -U_{02} - U_{03} \end{bmatrix}$$

Bei der Berechnung muss der in Aufgabenteil a) eingesetzte „virtuelle“ Widerstand berücksichtigt werden.

$$I_b = \lim_{R_{\infty} \rightarrow \infty} I_{M2} = \lim_{R_{\infty} \rightarrow \infty} \frac{\det D_2}{\det D}$$

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 8R & 2R & 0 \\ 2R & 6R & -R \\ 0 & -R & 2R + R_{\infty} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 8R \cdot \begin{vmatrix} 6R & -R \\ -R & 2R + R_\infty \end{vmatrix} - 2R \cdot \begin{vmatrix} 2R & -R \\ 0 & 2R + R_\infty \end{vmatrix} \\
&= 8R \cdot (12R^2 + 6RR_\infty - R^2) - 2R \cdot (4R^2 + 2RR_\infty) \\
&= 88R^3 + 48R^2R_\infty - 8R^3 - 4R^2R_\infty = 80R^3 + 44R^2R_\infty \\
\det(D_2) &= \begin{vmatrix} 8R & -U_{01} - U_{02} & 0 \\ 2R & -U_{01} & -R \\ 0 & -U_{02} - U_{03} & 2R + R_\infty \end{vmatrix} \\
&= -(-U_{01} - U_{02}) \cdot \begin{vmatrix} 2R & -R \\ 0 & 2R + R_\infty \end{vmatrix} + (-U_{01}) \cdot \begin{vmatrix} 8R & 0 \\ 0 & 2R + R_\infty \end{vmatrix} \\
&\quad - (-U_{02} - U_{03}) \cdot \begin{vmatrix} 8R & 0 \\ 2R & -R \end{vmatrix} \\
&= (U_{01} + U_{02}) \cdot (4R^2 + 2RR_\infty) - U_{01} \cdot (16R^2 + 8RR_\infty) \\
&\quad + (U_{02} + U_{03}) \cdot (-8R^2) \\
&= -U_{01} \cdot 12R^2 - U_{01} \cdot 6RR_\infty - U_{02} \cdot 4R^2 + U_{02} \cdot 2RR_\infty - U_{03} \cdot 8R^2 \\
\frac{\det(D_2)}{\det(D)} &= \frac{-U_{01} \cdot 12R^2 - U_{01} \cdot 6RR_\infty - U_{02} \cdot 4R^2 + U_{02} \cdot 2RR_\infty - U_{03} \cdot 8R^2}{80R^3 + 44R^2R_\infty} \\
&= \frac{R_\infty}{R_\infty} \cdot \frac{-U_{01} \cdot 12R^2}{R_\infty} - U_{01} \cdot 6R - \frac{U_{02} \cdot 4R^2}{R_\infty} + U_{02} \cdot 2R - \frac{U_{03}}{R_\infty} \cdot 8R^2}{\frac{80R^3}{R_\infty} + 44R^2} \\
&= \frac{-U_{01} \cdot 12R^2}{R_\infty} - U_{01} \cdot 6R - \frac{U_{02} \cdot 4R^2}{R_\infty} + U_{02} \cdot 2R - \frac{U_{03}}{R_\infty} \cdot 8R^2}{\frac{80R^3}{R_\infty} + 44R^2} \\
\lim_{R_\infty \rightarrow \infty} \frac{\det(D_2)}{\det(D)} &= \frac{-U_{01} \cdot 12R^2}{R_\infty} - U_{01} \cdot 6R - \frac{U_{02} \cdot 4R^2}{R_\infty} + U_{02} \cdot 2R - \frac{U_{03}}{R_\infty} \cdot 8R^2}{\frac{80R^3}{R_\infty} + 44R^2} \\
&= \frac{-U_{01} \cdot 6R + U_{02} \cdot 2R - I_{03} \cdot 8R^2}{44R^2} \\
\rightarrow I_b &= \frac{-U_{01} \cdot 6 + U_{02} \cdot 2 - I_{03} \cdot 8R}{44R} = \frac{-12V + 10V - 50\text{ mA} \cdot 8 \cdot 10\Omega}{44 \cdot 10\Omega} \\
&= \underline{\underline{-13,64\text{ mA}}} \\
U_R &= I_{03} \cdot R = 50\text{ mA} \cdot 10\Omega \\
&= \underline{\underline{0,5V}}
\end{aligned}$$