Gezeichnetes und Geschriebenes

Figuren

Wir haben drei Figuren, die uns durch dieses Buch begleiten:

Farad ist drahtig und hat lange Beine. Er hat viel Energie und steht manchmal unter großer Spannung.

Ohm heißt nicht nur wie die Einheit des Widerstands, manchmal bietet er auch Widerstand.

Henry sieht aus wie ein Wassertropfen. Er ist stromlinienförmig. Und er ist anpassungsfähig, auch wenn man ihm das nicht immer zutraut. Wenn es drauf ankommt, zwängt er sich durch engste Spalten und in kleinste Räume.

Nummerierungen

In technischen Dokumenten und Büchern ist es üblich, alle Gleichungen, Bilder und Tabellen zu nummerieren, so wie es auch in diesem Buch umgesetzt ist. Verweise auf andere Bücher (Literatur) werden über ein Kürzel angegeben.

Gleichungen. Wichtige Gleichungen werden in einer separaten Zeile geschrieben und in runden Klammern nummeriert. Dabei gibt die erste Zahl das Kapitel an, während die zweite Zahl eine fortlaufende Nummerierung repräsentiert. Die beiden Zahlen sind durch einen Punkt voneinander getrennt.

Beispiel: Der Satz von Pythagoras lautet:

$$z_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \tag{1.4}$$

Wenn wir auf diese Gleichung verweisen, so schreiben wir Gl. (1.4). Wenn wir auf mehrere Gleichungen verweisen, verwenden wir die Abkürzung Gln.

Besonders wichtige Gleichungen werden in einen rechteckigen Rahmen gesetzt, um deren Wichtigkeit zu unterstreichen.

Beispiel: Zwischen komplexer Admittanz und Impedanz gilt:

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}} \tag{3.48}$$

Bilder. Alle Bilder sind nummeriert und weisen eine Bildunterschrift auf, um die gezeigte Darstellung in kurzer Form zu beschreiben. Die erste Zahl der fortlaufenden Nummerierung kennzeichnet das Kapitel, die zweite Zahl gibt eine fortlaufende Nummer an.

Beispiel: Henry zeigt beispielsweise in Bild 3.7a auf Seite 33 auf ein Zeigerdiagramm.

Tabellen. Die Nummerierung einer Tabelle steht oberhalb der Tabelle und eine kurze textliche Beschreibung erläutert, was dargestellt ist. Die Tabellen sind unabhängig von den Bildern, aber nach demselben Schema, mit Kapitel und fortlaufender Zahl, nummeriert.

Literatur. Der Verweis auf andere Bücher wird mit einer Kombination aus Buchstaben und Zahlen codiert. Die konkrete Auflösung dieser Codierung mit allen bibliografischen Angaben befindet sich im Kapitel Literatur auf Seite 205 am Ende dieses Buchs.

Beispiel: Der kosinusförmige Stromverlauf ist in [Pre08, Abschnitt 22.3] erläutert.

Schreibweisen

Wir verwenden lateinische und griechische Buchstaben in unterschiedlichen Schreibweisen.

Hervorhebung. Wichtige Begriffe und Formulierungen sind im Text *kursiv* geschrieben, also *schräg gestellt.*

Physikalische Größen. Mit dem Formelzeichen t bezeichnen wir beispielsweise die physikalische Größe Zeit. Formelzeichen werden kursiv geschrieben. Zahlenwerte werden mit einem schmalen Leerzeichen als Tausendertrennzeichen dargestellt. Die zugehörige Einheit einer physikalischen Größe wird gerade geschrieben und vom Zahlenwert durch ein schmales Leerzeichen getrennt:

Beispiel: Die Zeitdauer beträgt $t = 1\,200\,\mathrm{s}$

Wenn eine physikalische Größe gleich null ist, so wird ihre Einheit dennoch mit angegeben.

Beispiel: Die Zählung beginnt zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$

Hervorhebungen

Am Beginn eines neuen Abschnitts, wo neue Formelzeichen und Einheiten auftreten, werden diese strukturiert zusammengefasst. Dabei ist in aller Regel Ohm so freundlich und weist auf besondere Eigenschaften und Aussprachen hin.

Zeichen	**Einheit**	**Größe**	**Quantity**
i	A	Strom	Current
u	V	Spannung	Voltage

Wichtige Sachverhalte werden gesondert hervorgehoben:

Wichtige Eigenschaften oder Zusammenhänge werden durch einen Kasten mit Ausrufezeichen versehen.

Der Verweis auf ausgewählte Bücher ist gesondert gekennzeichnet:

Siehe Kapitel 4 in: Christian Kral, »Grundlagen der Elektrotechnik 1«, Carl Hanser Verlag 2024, ISBN 978–3–446–47376–8

Am Ende von mehreren Abschnitten werden wichtige deutsche und englische Begriffe zusammengefasst.

Deutsch	**English**
Spannung	Voltage
Strom	Current

Erweitertes Wissen. Dadurch werden Inhalte gekennzeichnet, die über das grundlegende Wissen hinausgehen.

Beispiele und Übungen

Zahlenwertbeispiele. Durchgerechnete Zahlenwertbeispiele sind im Buch enthalten. Diese Zahlenwertbeispiele wenden das im jeweiligen Abschnitt erworbene Wissen unmittelbar an. Sie sind fortlaufend nummeriert und werden mit einem kleinen rechteckigen Quadrat abgeschlossen. ■

Übungsaufgaben. Es gibt zu diesem Buch eine große Sammlung von Musterbeispielen und Übungsaufgaben, die über einen LeTTo-Server[1] online zur Verfügung gestellt werden. Zu dieser Aufgabensammlung gelangen Sie, in dem Sie den auf der ersten Seite abgedruckten Code auf *https://plus.hanser-fachbuch.de* eingeben und den dort angegebenen Anweisungen folgen. Über LeTTo können alle Rechen- bzw. Arbeitsschritte der bearbeiteten Aufgaben online auf Korrektheit geprüft werden.

Die gesamte Aufgabensammlung ist frei verfügbar und kann daher auch auf dem LeTTo-Server einer Bildungseinrichtung uneingeschränkt genutzt, verändert und weiterentwickelt werden.

Suche im Buch

Grundsätzlich gibt es folgende systematische Möglichkeiten, Inhalte in diesem Buch zu finden:

Inhaltsverzeichnis. Das am Beginn des Buchs befindliche Inhaltsverzeichnis zeigt die Gliederung in Kapitel und Abschnitte. Dort kann man sich an den angeführten Themen orientieren und dann auf den entsprechenden Seiten nachschlagen.

Beispiel: 3.3 Impedanz 46

Stichwortverzeichnis. Das Stichwortverzeichnis ab Seite 207 listet die wichtigsten Stichworte und Begriffe auf. Gleich daneben sind jene Seitennummern angegeben, unter denen die zugehörigen Inhalte zu finden sind.

Beispiel: Impedanz 46

Verzeichnis der Formelzeichen. Das Verzeichnis aller in diesem Buch verwendeten Formelzeichen mitsamt Einheit (EH) ist im Anhang A ab Seite 199 angegeben.

Beispiel:	**Größe**	**EH**	**Beschreibung**	**Seite**
	i	A	Momentanwert des Stroms	23

Verzeichnis der Einheiten. Das Verzeichnis aller in diesem Buch verwendeten Einheiten ist im Anhang B auf Seite 203 angeführt.

Beispiel:	**Einheit**	**Alternative**	**Einheitenname**
	S	A/V	Siemens

[1] LeTTo steht für »Learning Evaluating Teaching Testing Online«, siehe *https://letto.at*.

1 Komplexe Rechnung

Wir benötigen die komplexe Rechnung in der Wechsel- und Drehstromtechnik. Damit sind wir in der Lage, die zeitabhängigen sinus- bzw. kosinusförmigen Spannungen und Ströme auf eine mathematisch sehr einfache Art und Weise zu behandeln. Für die komplexen Zahlen benötigen wir die sogenannte *imaginäre Einheit*, die in der Elektrotechnik mit »j« und in der Mathematik mit »i« bezeichnet wird.

Das Quadrat der imaginären Einheit j ergibt:

$$\boxed{\mathrm{j}^2 = -1} \tag{1.1}$$

Da keine reelle Zahl existiert, deren Quadrat -1 ergibt, eröffnet die imaginäre Einheit einen neuen Zahlenbereich. Die reellen und imaginären Zahlen bilden gemeinsam die Zahlenmenge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Kartesische Darstellung

Eine beliebige komplexe Zahl[1] $\underline{z}_1 \in \mathbb{C}$ weist den Realteil x_1 und den Imaginärteil y_1 auf. Die zugehörige Schreibweise über Real- und Imaginärteil nennen wir die kartesische Darstellung der komplexen Zahl $\underline{z}_1$:

$$\underline{z}_1 = x_1 + \mathrm{j} \cdot y_1 \tag{1.2}$$

Die komplexe Zahl $\underline{z}_1$ versehen wir mit einem Unterstrich, um sie von einer reellen Zahl zu unterscheiden.

Sowohl der **Real-** als auch der **Imaginärteil** sind . . .

Erst die **Multiplikation mit j** macht aus $\mathrm{j} \cdot y_1$ eine **imaginäre Zahl**.

[1] Die Schreibweise $\underline{z}_1 \in \mathbb{C}$ besagt, dass $\underline{z}_1$ ein Element der Zahlenmenge $\mathbb{C}$ ist.

Der Real- und Imaginärteil werden in diesem Zusammenhang über die Funktionen Re und Im aus der komplexen Zahl $\underline{z}_1$ ermittelt:

$$\operatorname{Re}\left(\underline{z}_1\right) = x_1 \qquad\qquad \operatorname{Im}\left(\underline{z}_1\right) = y_1 \tag{1.3}$$

Zu den komplexen Zahlen gehören folgende Begriffe und Eigenschaften:

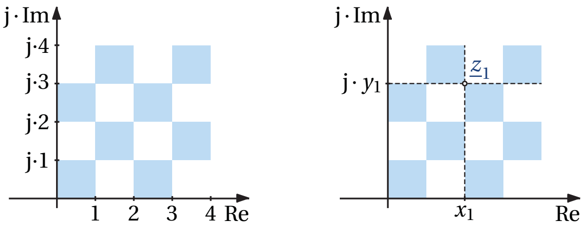
Komplexe Ebene. Die komplexe Ebene oder *Gaußsche Zahlenebene* in Bild 1.1a ist eine Ebene, die über zwei rechtwinkelig zueinander stehende Achsen aufgespannt wird:

Reelle Achse. Die reelle Achse »Re« zeichnen wir meist nach rechts.

Imaginäre Achse. Die imaginäre Achse »j · Im« ist um 90° im mathematisch positiven Sinn (⟲) gegenüber der reellen Achse verdreht. In Bild 1.1b zeigt diese Achse nach oben.

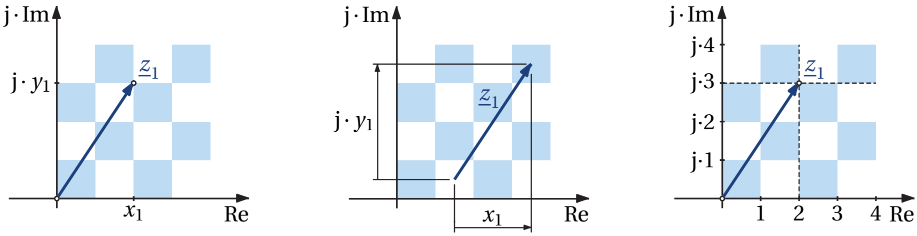
Komplexe Zahl. Eine komplexe Zahl $\underline{z}_1 = x_1 + \mathrm{j} \cdot y_1$ finden wir in der Ebene, indem wir

- eine gestrichelte Linie senkrecht auf die reelle Achse bei x_1 und
- eine gestrichelte Linie senkrecht auf die imaginäre Achse bei $\mathrm{j} \cdot y_1$ zeichnen.
- Der Schnittpunkt der gestrichelten Linien repräsentiert die komplexe Zahl $\underline{z}_1$ in der komplexen Ebene. Diese komplexe Zahl ist in Bild 1.1b durch eine kreisförmige Markierung (∘) repräsentiert.



(a) (b)

Bild 1.1 (a) Komplexe Ebene, (b) Konstruktion der komplexen Zahl $\underline{z}_1$, mit kreisförmiger Markierung (∘) in der komplexen Ebene



(a) (b) (c)

Bild 1.2 Repräsentation von $\underline{z}_1$ durch einen Pfeil: (a) allgemein für $\underline{z}_1 = x_1 + \mathrm{j} \cdot y_1$, (b) komplexe Zahl $\underline{z}_1 = x_1 + \mathrm{j} \cdot y_1$ parallel verschoben, (c) komplexe Zahl $\underline{z}_1 = 2 + \mathrm{j} \cdot 3$

Komplexer Pfeil. Wir repräsentieren eine komplexe Zahl in der Ebene in aller Regel durch einen »komplexen« Pfeil, wie er in Bild 1.2a dargestellt ist. Dazu zeichnen wir diesen Pfeil vom Ursprung zum eingezeichneten Punkt $\underline{z}_1$.

Parallelverschiebung. Komplexe Pfeile darf man in der Wechselstromtechnik zur Veranschaulichung von grafischen Zusammenhängen parallel verschieben. Der in Bild 1.2b dargestellte Pfeil repräsentiert daher dieselbe komplexe Zahl $\underline{z}_1$ wie in Bild 1.2a, da er dieselbe Länge und dieselbe Richtung aufweist.

Zahlenwertbeispiel 1.1. Wir zeichnen die komplexe Zahl $\underline{z}_1 = 2 + \mathrm{j} \cdot 3$ als Pfeil in die komplexe Ebene ein.

Der Realteil- und Imaginärteil dieser komplexen Zahl betragen:

$$\mathrm{Re}\left(\underline{z}_1\right) = 2 \qquad\qquad \mathrm{Im}\left(\underline{z}_1\right) = 3$$

Um die komplexe Zahl $\underline{z}_1$ in Bild 1.2c zu finden, zeichnen wir

- eine gestrichelte vertikale Linie bei 2 (passend zum Realteil) und
- eine gestrichelte horizontale Linie bei $\mathrm{j} \cdot 3$ (passend zum Imaginärteil) ein.

Die komplexe Zahl $\underline{z}_1$ ist im Schnittpunkt der gestrichelten Linien durch eine kreisförmige Markierung gekennzeichnet und durch einen Pfeil repräsentiert. ■

Betrag

Der Betrag einer komplexen Zahl $\underline{z}_1 = x_1 + \mathrm{j} \cdot y_1$ ist gemäß Bild 1.3 die Länge des zugehörigen komplexen Zeigers. Nach dem Satz von Pythagoras bestimmen wir:

$$|\underline{z}_1| = \mathrm{abs}\left(\underline{z}_1\right) = z_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \tag{1.4}$$

Für die **komplexe Zahl** $\underline{z}_1$ und deren **Betrag** z_1 gilt:

Der Betrag des Vektors wird entweder durch zwei Betragsstriche um die komplexe Zahl $\underline{z}_1$ in der Form $|\underline{z}_1|$, durch die Funktion abs (Absolutwert) oder durch das Fortlassen des komplexen Unterstrichs gekennzeichnet, also durch z_1.

Daher ist es fortan wichtig, komplexe Zahlen konsequent mit einem komplexen Unterstrich zu versehen, um eine Verwechslung mit den zugehörigen Beträgen zu vermeiden.

Winkel

Den Winkel φ_1 der komplexen Zahl $\underline{z}_1$ in Bild 1.3 bestimmen wir mit der Funktion arg (Argument):

$$\arg\left(\underline{z}_1\right) = \varphi_1 \tag{1.5}$$

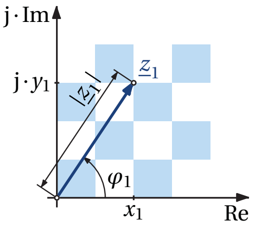


Bild 1.3 Komplexe Zahl $\underline{z}_1$ in der komplexen Ebene mit Betrag und Winkel

Polardarstellung

Die komplexe Zahl $\underline{z}_1 = x_1 + \mathrm{j} \cdot y_1$ kann statt mit Real- und Imaginärteil auch über ihren Betrag und Winkel repräsentiert werden. Dafür gibt es die *Polarschreibweise*:

$$\underline{z}_1 = z_1 \angle \varphi_1 \tag{1.6}$$

Dabei entspricht der Ausdruck $\angle\varphi_1$ dem Term $\left(\cos(\varphi_1) + \mathrm{j} \cdot \sin(\varphi_1)\right)$ und damit einem Zeiger mit der Länge eins und dem Winkel φ_1. Aus dem Betrag z_1 und dem Phasenwinkel φ_1 können gemäß Gl. (1.3) der Real- und Imaginärteil bestimmt werden:

$$\mathrm{Re}\left(\underline{z}_1\right) = x_1 = z_1 \cdot \cos(\varphi_1) \qquad \mathrm{Im}\left(\underline{z}_1\right) = y_1 = z_1 \cdot \sin(\varphi_1) \tag{1.7}$$

Jede **komplexe Zahl** kann gleichwertig …

Zahlenwertbeispiel 1.2. Wir ermitteln für $\underline{z}_1 = x_1 + \mathrm{j} \cdot y_1 = 2 + \mathrm{j} \cdot 3$ den Betrag und Winkel: Betrag und Winkel lassen sich vorteilhaft direkt mit einem Taschenrechner ermitteln, indem man von kartesischer auf polare Darstellung umschaltet. Für eine händische Rechnung wenden wir zunächst den Satz von Pythagoras an, um den Betrag zu ermitteln:

$$z_1 = |\underline{z}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3{,}606$$

Da der Realteil positiv ist, wird der Winkel direkt aus der Arkustangensfunktion bestimmt:

$$\varphi_1 = \arg\left(\underline{z}_1\right) = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) = 56{,}31^\circ$$

Damit erhalten wir:

$$\underline{z}_1 = 3{,}606\angle 56{,}31^\circ = \underbrace{3{,}606 \cdot \cos(56{,}31^\circ)}_{2} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{3{,}606 \cdot \sin(56{,}31^\circ)}_{3}$$

■

Siehe Abschnitt 4.2 zu den Winkelfunktionen in: Christian Kral, »Grundlagen der Elektrotechnik 1«, Carl Hanser Verlag 2024, ISBN 978–3–446–47376–8

Addition

Die Summe von $\underline{z}_1 = x_1 + \mathrm{j} \cdot y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + \mathrm{j} \cdot y_2$ berechnen wir gemäß:

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{j} \cdot (y_1 + y_2) \tag{1.8}$$

Der Realteil der Summe ist die Summe der Realteile, der Imaginärteil der Summe berechnet sich aus der Summe der Imaginärteile. Grafisch setzen wir in Bild 1.4a bei der Summenbildung den Anfang eines der beiden Pfeile an die Pfeilspitze des anderen Pfeils.

Zahlenwertbeispiel 1.3. Wir bestimmen für $\underline{z}_1 = 2 + \mathrm{j} \cdot 3$ und $\underline{z}_2 = 2 + \mathrm{j}$ die Summe $\underline{z}_1 + \underline{z}_2$:

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 2 + \mathrm{j} \cdot 3 + 2 + \mathrm{j} = \underbrace{2+2}_{4} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{(3+1)}_{4} = 4 + \mathrm{j} \cdot 4$$ ■

Gegenzahl

Die zur komplexen Zahl $\underline{z}_2 = x_2 + \mathrm{j} \cdot y_2$ gehörige negative Zahl $-\underline{z}_2$ heißt Gegenzahl. Um sie zu bestimmen, müssen wir die Vorzeichen des Real- und Imaginärteils umdrehen:

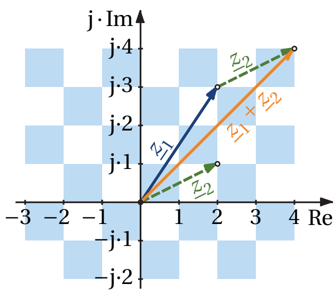
$$-\underline{z}_2 = -x_2 - \mathrm{j} \cdot y_2 \tag{1.9}$$

Zahlenwertbeispiel 1.4. Wir stellen die komplexen Zahlen $\underline{z}_2 = 2 + \mathrm{j}$ und $-\underline{z}_2$ in der komplexen Ebene dar.

Dafür ermitteln wir für $\underline{z}_2 = 2 + \mathrm{j} = 3{,}606\angle 56{,}31°$ die Gegenzahl:

$$-\underline{z}_2 = -2 - \mathrm{j} = 3{,}606\angle -123{,}69° = \underbrace{3{,}606 \cdot \cos(-123{,}69°)}_{-2} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{3{,}606 \cdot \sin(-123{,}69°)}_{-1}$$

Die komplexen Pfeile zu $\underline{z}_2$ und $-\underline{z}_2$ in Bild 1.4b zeigen in einander entgegensetzte Richtungen. Die Pfeile weisen jedoch dieselbe Länge bzw. denselben Betrag auf. ■



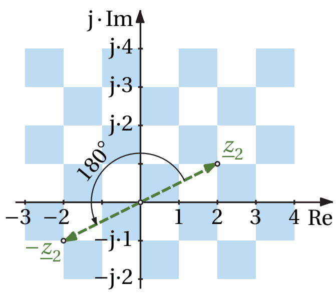
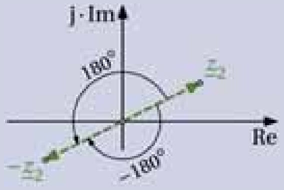


Bild 1.4 (a) Addition der komplexen Zahlen $\underline{z}_1$ und $\underline{z}_2$, (b) komplexe Zahl $\underline{z}_2$ und Gegenzahl $-\underline{z}_2$

Die komplexe **Zahl** $\underline{z}_2$ und ihrer **Gegenzahl** $-\underline{z}_2$ unterscheiden sich um den Winkel $\pm 180°$.



Subtraktion

Die Differenz aus $\underline{z}_1 = x_1 + \mathrm{j} \cdot y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + \mathrm{j} \cdot y_2$ berechnen wir dadurch, indem wir $\underline{z}_1$ und die Gegenzahl $-\underline{z}_2$ addieren:

$$\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = \underline{z}_1 + (-\underline{z}_2) = (x_1 - x_2) + \mathrm{j} \cdot (y_1 - y_2) \tag{1.10}$$

Bei der grafischen Subtraktion in Bild 1.5a werden die Pfeile von $\underline{z}_1$ und $-\underline{z}_2$ addiert.

Zahlenwertbeispiel 1.5. Wir bestimmen die Differenz $\underline{z}_1 - \underline{z}_2$ für $\underline{z}_1 = 2 + \mathrm{j} \cdot 3$ und $\underline{z}_2 = 2 + \mathrm{j}$:

$$\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = 2 + \mathrm{j} \cdot 3 - (2 + \mathrm{j}) = 2 + \mathrm{j} \cdot 3 + (-2 - \mathrm{j}) = \underbrace{2 - 2}_{0} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{(3 - 1)}_{2} = 0 + \mathrm{j} \cdot 2$$ ■

Multiplikation

Das Produkt aus $\underline{z}_1 = x_1 + \mathrm{j} \cdot y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + \mathrm{j} \cdot y_2$ lässt sich in kartesischer Form durch Ausmultiplizieren bestimmen:

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + \mathrm{j} \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \tag{1.11}$$

Verwenden wir alternativ die Polardarstellung $\underline{z}_1 = z_1 \angle \varphi_1$ und $\underline{z}_2 = z_2 \angle \varphi_2$, so ergibt sich bei der Multiplikation:

$$\boxed{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = z_1 \cdot z_2 \angle (\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{1.12}$$

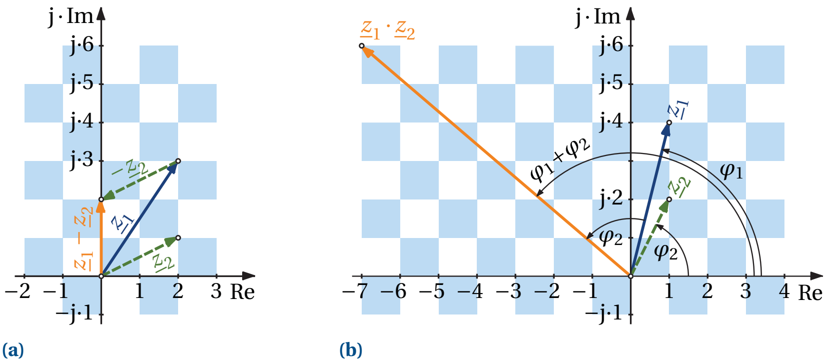


Bild 1.5 (a) Subtraktion und (b) Multiplikation der komplexen Zahlen $\underline{z}_1$ und $\underline{z}_2$