

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Summieren, Multiplizieren

Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a + b + c &= a + c + b \\ &= b + c + a \\ a \cdot b \cdot c &= a \cdot c \cdot b \\ &= b \cdot c \cdot a \end{aligned}$$

Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= a + (b + c + d) \\ &= (a + c) + (b + d) \\ a - b + c - d &= a - (b - c + d) \\ &= (a + c) - (b + d) \\ a \cdot b \cdot c \cdot d &= a \cdot (b \cdot c \cdot d) \\ &= (a \cdot c) \cdot (b \cdot d) \end{aligned}$$

Regeln für das Rechnen mit Vorzeichen

$$\begin{aligned} (+a) + (+b) &= a + b & (+a) - (-b) &= a + b & (+a) - (+b) &= a - b & (+a) + (-b) &= a - b \\ (+a) \cdot (+b) &= +a \cdot b = ab & (+a) \cdot (-b) &= -a \cdot b = -ab \\ (-a) \cdot (-b) &= +a \cdot b = ab & (-a) \cdot (+b) &= -a \cdot b = -ab \end{aligned}$$

Distributivgesetz

$$\begin{aligned} a \cdot (c + d) &= ac + ad & a \cdot (c - d) &= ac - ad & a - bc - bd + be &= a - b \cdot (c + d - e) \\ (a + b) \cdot (c + d) &= ac + ad + bc + bd & (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b) \cdot (c - d) &= ac - ad - bc + bd & (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b) \cdot (c - d) &= ac - ad + bc - bd & (a + b) \cdot (a - b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

1.2 Rechnen mit Brüchen

Vorzeichenregeln

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \quad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \quad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b} \quad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Rechenregeln

Kürzen mit k :

$$\frac{ak}{bk} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$$

Erweitern mit n :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{an}{bn}$$

Summieren:

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$$

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-bc}{cd}$$

Multiplizieren:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

Dividieren:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c} = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$$

Wichtige Anwendungen:

$$\frac{ak+bk}{ck} = \frac{k(a+b)}{ck} = \frac{a+b}{c};$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{d}{e} = \frac{ae+(b+c) \cdot d}{(b+c) \cdot e};$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{b \cdot c} \Rightarrow a = \frac{b \cdot c}{b+c}$$

1.3 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzen

a Grundzahl (Basis)
 n Hochzahl (Exponent) $a^n = c$
 c Potenzwert

$$c = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \Rightarrow a^n$$

$$a^n = c$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^0 = 1$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = a^m \cdot b^{-m}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Wurzeln

a Wurzel
 n Wurzelexponent $\sqrt[n]{c} = a$
 c Radikand

$$c = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \Rightarrow \sqrt[n]{c} = a$$

$$\sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}}$$

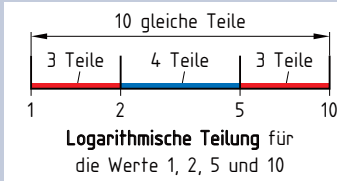
$$\sqrt[n]{c \cdot d} = \sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[n]{d}$$

$$\sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}} = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{c^m} = c^{\frac{m}{n}}$$

$$a^2 = c \Rightarrow a = \pm \sqrt{c}$$

Logarithmen



n Logarithmus a Basis
 c Numerus

Eingabemodus:
Taste log



$$c = a^n \Rightarrow$$

$$\log_a c = n$$

- Zehnerlogarithmus (dekadischer Logarithmus): $\log_{10} c = \lg c$
- Natürlicher Logarithmus ($e = 2,718\dots$): $\log_e c = \ln c$
- Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus): $\log_2 c = \lg c$

$$\log_a c + \log_a d = \log_a (c \cdot d)$$

$$\log_a c - \log_a d = \log_a \left(\frac{c}{d}\right)$$

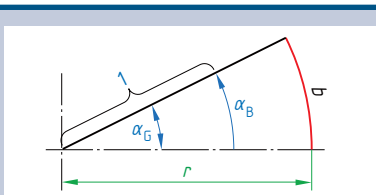
$$-\log_a d = \log_a \left(\frac{1}{d}\right)$$

$$k \cdot \log_a c = \log_a (c^k)$$

$$\frac{1}{n} \cdot \log_a c = \log_a (\sqrt[n]{c})$$

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_a c \cdot \log_b a$$

1.4 Winkel, Winkleinheiten



α_B Winkel im Bogenmaß,
Einheit Radiant (rad)

$$\alpha_B = \frac{b}{r} \quad \text{rad} = \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1$$

α_G Winkel im Gradmaß,
Einheit Grad ($^\circ$)

$$\alpha_B = \frac{\alpha_G}{360^\circ} \cdot 2\pi$$

b Bogenlänge

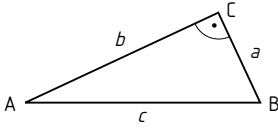
r Radius

$$\Rightarrow \alpha_G = \frac{\alpha_B}{2\pi} \cdot 360^\circ$$

Winkel α_G im Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel α_B im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6} = 0,52$	$\frac{\pi}{4} = 0,79$	$\frac{\pi}{3} = 1,05$	$\frac{\pi}{2} = 1,57$	$\pi = 3,14$	$\frac{3}{2} \cdot \pi = 4,71$	$2 \cdot \pi = 6,28$

1.5 Rechnen am Dreieck

Satz des Pythagoras



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

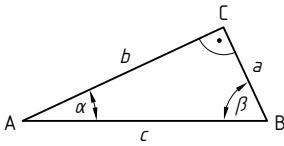
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

c Hypotenuse

a Kathete

b Kathete

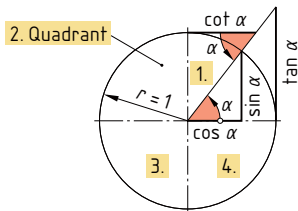
☞ Kennzeichen für rechten Winkel

Winkelfunktionen
(Trigonometrische Funktionen)

c Hypotenuse

a Gegenkathete von α ,
Ankathete von β b Gegenkathete von β ,
Ankathete von α

Einheitskreis



Quadrant	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
1.	+	+	+	+
2.	+	-	-	-
3.	-	-	+	+
4.	-	+	-	-

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin \alpha; \quad c = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos \alpha; \quad c = \frac{b}{\cos \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot \tan \alpha; \quad b = \frac{a}{\tan \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \cot \alpha; \quad a = \frac{b}{\cot \alpha}$$

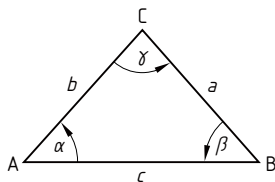
$$\sin \beta = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \sin \beta; \quad c = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \cos \beta; \quad c = \frac{a}{\cos \beta}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \tan \beta; \quad a = \frac{b}{\tan \beta}$$

$$\cot \beta = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot \cot \beta; \quad b = \frac{a}{\cot \beta}$$

Sinussatz



$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}; \quad b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{b} \cdot \sin \beta; \quad \sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha$$

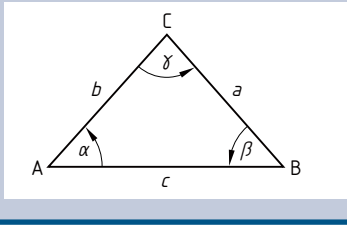
$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \Rightarrow b = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}; \quad c = b \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \cdot \sin \gamma; \quad \sin \gamma = \frac{c}{b} \cdot \sin \beta$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \Rightarrow c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}; \quad a = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{a} \cdot \sin \alpha; \quad \sin \alpha = \frac{a}{c} \cdot \sin \gamma$$

Kosinussatz



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \cos \alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot ac \cdot \cos \beta \quad \Rightarrow \cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos \gamma \quad \Rightarrow \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Wichtige Winkelfunktionswerte:

Funktion	Winkel α									
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	180°	270°	360°
Sinus α	0	0,259	0,500	0,707	0,866	0,966	1	0	-1	0
Cosinus α	1	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0	-1	0	1
Tangens α	0	0,268	0,577	1	1,732	3,732	∞	0	∞	0

1.6 Zahlensysteme, BCD-Code, Rechenregeln

Vergleich von Zahlensystemen:

Dezimalzahl	Dualzahl	Sedezimalzahl***
0	0	0
1 = 2 ⁰	1	1
2 = 2 ¹	10	2
3	11	3
4 = 2 ²	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8 = 2 ³	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F
16 = 2 ⁴	10000	10

BCD-(8-4-2-1)-Code:

Dezimalzahl	Stellenwert	8421
0	0000	0000
1	0000	0001
2	0000	0010
3	0000	0011
4	0000	0100
5	0000	0101
6	0000	0110
7	0000	0111
8	0000	1000
9	0000	1001
*	0000	1010
**		+0110
10	0001	0000
11	0001	0001
12	0001	0010
13	0001	0011
14	0001	0100
15	0001	0101
16	0001	0110
17	0001	0111
18	0001	1000
19	0001	1001
*	0001	1010
**		+0110
20	0010	0000

Rechnen mit Dualzahlen:

+	00	-	00
	0	-	0
	00	-	00
+	01	-	01
	0	-	0
	01	-	01
+	00	-	00
	1	-	1
	01	-	01
+	01	-	01
	1	-	1
	10	-	00
+	011	-	011
	10	-	10
	101	-	001
+	011	-	011
	11	-	100
	110	-	001

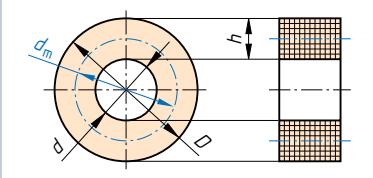
* Pseudotetrade, bewirkt Rückstellung und Übertrag auf die nächste Dekade.
 ** Korrektursummand beim Übertrag.
 *** auch Hexadezimalzahl genannt.

1 · 1 = 1
0 · 0 = 0
1 · 0 = 0
0 · 1 = 0
0 : 1 = 0
1 : 1 = 1

2 Längen- und Flächenberechnungen

2.1 Drahtlängen von Rundspulen und von Rechteckspulen

Rundspulen



l Drahtlänge
 D, d Durchmesser
 d_m mittlerer Durchmesser
 h Höhe (Wickelhöhe)
 N Windungszahl

$$l = \pi \cdot d_m \cdot N \quad \Rightarrow N = \frac{l}{\pi \cdot d_m}$$

$$d_m = \frac{D + d}{2} \quad \Rightarrow D = 2 \cdot d_m - d$$

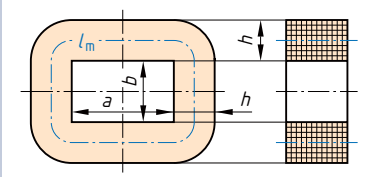
$$h = \frac{D - d}{2} \quad \Rightarrow D = 2 \cdot h + d;$$

$$d_m = d + h$$

$$d = D - 2 \cdot h$$

$$d_m = D - h$$

Rechteckspulen



l Drahtlänge
 b Breite

l_m mittlere Windungslänge
 h Wickelhöhe

a Länge
 N Windungszahl

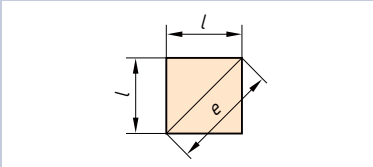
$$l = (2a + 2b + \pi \cdot h) \cdot N \quad \Rightarrow N = \frac{l}{2a + 2b + \pi \cdot h};$$

$$l = l_m \cdot N$$

$$h = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{l}{N} - 2a - 2b \right)$$

2.2 Flächen

Quadrat



A Fläche
 l Seitenlänge

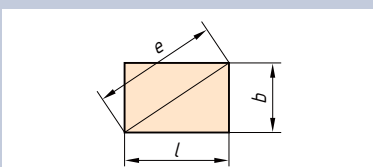
u Umfang
 e Diagonale, Eckenmaß

$$A = l^2 \quad \Rightarrow l = \sqrt{A}$$

$$u = 4 \cdot l \quad \Rightarrow l = \frac{u}{4}$$

$$e = \sqrt{2} \cdot l$$

Rechteck



A Fläche
 u Umfang

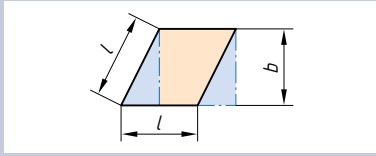
l Länge
 e Diagonale, Eckenmaß

b Breite

$$A = l \cdot b \quad \Rightarrow l = \frac{A}{b}$$

$$u = 2(l + b) \quad \Rightarrow l = \frac{u}{2} - b$$

$$e = \sqrt{l^2 + b^2}$$

Raute

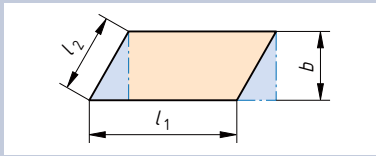
A Fläche
 l Länge
 b Breite
 u Umfang

$$A = l \cdot b$$

$$\Rightarrow l = \frac{A}{b}$$

$$u = 4 \cdot l$$

$$\Rightarrow l = \frac{u}{4}$$

Parallelogramm

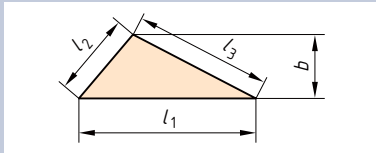
A Fläche
 l_1, l_2 Längen der Seiten
 b Breite
 u Umfang

$$A = l_1 \cdot b$$

$$\Rightarrow l_1 = \frac{A}{b}; \quad b = \frac{A}{l_1}$$

$$u = 2(l_1 + l_2)$$

$$\Rightarrow l_1 = \frac{u}{2} - l_2; \quad l_2 = \frac{u}{2} - l_1$$

Dreieck

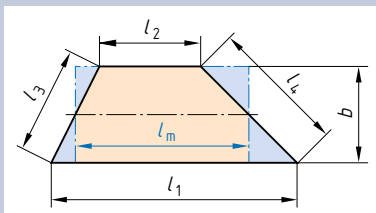
A Fläche
 l_1, l_2, l_3 Längen der Seiten
 b Breite
 u Umfang

$$A = \frac{l_1 \cdot b}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{2 \cdot A}{l_1}; \quad l_1 = \frac{2 \cdot A}{b}$$

$$u = l_1 + l_2 + l_3$$

$$\Rightarrow l_1 = u - l_2 - l_3$$

Trapez

A Fläche
 b Breite
 l_1 große Länge
 l_2 kleine Länge
 l_m mittlere Länge
 l_3, l_4 Längen der Schrägseiten

$$A = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot b$$

$$\Rightarrow l_1 = \frac{2 \cdot A}{b} - l_2$$

$$u = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$$

$$\Rightarrow l_1 = u - l_2 - l_3 - l_4$$

$$u = 2 \cdot l_m + l_3 + l_4$$

$$\Rightarrow l_m = \frac{u - l_3 - l_4}{2}$$

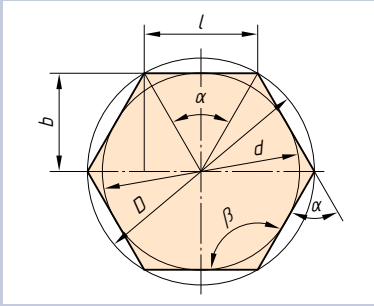
$$A = l_m \cdot b$$

$$\Rightarrow l_m = \frac{A}{b}; \quad b = \frac{A}{l_m}$$

$$l_m = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

$$\Rightarrow l_1 = 2 \cdot l_m - l_2; \\ l_2 = 2 \cdot l_m - l_1$$

Regelmäßiges Vieleck



- A** Fläche
l Seitenlänge
b Breite eines Teildreiecks
n Eckenzahl
u Umfang
D Umkreisdurchmesser
d Inkreisdurchmesser
 α Mittelpunktswinkel
 β Eckenwinkel

$$A = \frac{l+b}{2} \cdot n \quad \Rightarrow n = \frac{2 \cdot A}{l+b}; \quad l = \frac{2 \cdot A}{n} - b$$

$$u = l \cdot n \quad \Rightarrow l = \frac{u}{n}; \quad n = \frac{u}{l}$$

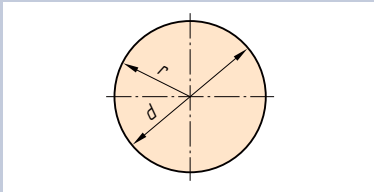
$$l = D \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow D = \frac{l}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \quad \Rightarrow n = \frac{360^\circ}{\alpha}$$

$$b = \frac{1}{2} \cdot d \quad \Rightarrow d = 2 \cdot b$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha \quad \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \beta$$

Kreis



- A** Kreisfläche
d Durchmesser
r Radius, Halbmesser
u Umfang
 π Kreiszahl ($\pi = 3,1415\dots$)

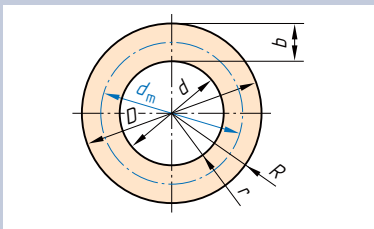
$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}; \quad \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}}$$

$$A = \pi \cdot r^2 \quad \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

$$u = \pi \cdot d; \quad \Rightarrow d = \frac{u}{\pi}$$

$$u = 2\pi \cdot r \quad \Rightarrow r = \frac{u}{2 \cdot \pi} = \frac{d}{2}$$

Kreising



- A** Kreisingfläche
D Außendurchmesser
d Innendurchmesser
 d_m mittlerer Durchmesser
R, r Radien
b Breite (Dicke)
 u_m mittlerer Kreisumfang (gestreckte Länge)

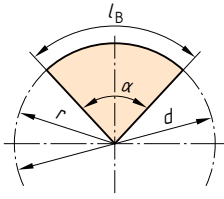
$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \quad \Rightarrow D = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi} + d^2};$$

$$d = \sqrt{D^2 - \frac{4 \cdot A}{\pi}}$$

$$u_m = \pi \cdot d_m \quad \Rightarrow d_m = \frac{u_m}{\pi}$$

$$b = \frac{D-d}{2} \quad \Rightarrow D = 2 \cdot b + d; \quad d = D - 2b$$

$$d_m = \frac{D+d}{2} \quad \Rightarrow D = 2 \cdot d_m - d; \quad d = 2 \cdot d_m - D$$

Kreisausschnitt (Kreissektor)

- A Fläche des Kreisausschnitts
 d Durchmesser
 r Radius
 l_B Bogenlänge
 α Innenwinkel

$$A = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \alpha}{4 \cdot 360^\circ};$$

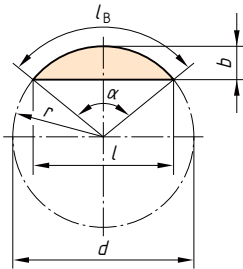
$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot A \cdot 360^\circ}{\pi \cdot \alpha}};$$

$$A = \frac{r \cdot l_B}{2}$$

$$\alpha = \frac{4 \cdot A \cdot 360^\circ}{\pi \cdot d^2}$$

$$l_B = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$$

$$\Rightarrow r = \frac{l_B \cdot 180^\circ}{\pi \cdot \alpha}$$

Kreisabschnitt

- A Fläche
 r Radius
 d Durchmesser
 l_B Bogenlänge
 l Sehnenlänge
 b Breite
 α Innenwinkel

$$l_B = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ}$$

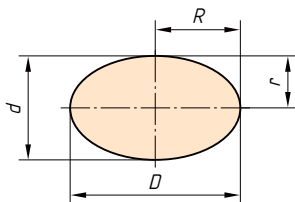
$$A = \frac{l_B \cdot r - l(r-b)}{2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2 \cdot A - r \cdot b}{l_B - l};$$

$$l_B = \frac{2 \cdot A + l(r-b)}{r}$$

Näherungsformel:

$$A \approx \frac{2}{3} \cdot l \cdot b$$

Ellipse

- A Fläche
 d kleine Achse
 D große Achse
 r kleine Halbachse
 R große Halbachse
 u Umfang

$$A = \frac{\pi \cdot D \cdot d}{4};$$

$$\Rightarrow D = \frac{4 \cdot A}{\pi \cdot d}; \quad d = \frac{4 \cdot A}{\pi \cdot D}$$

$$A = \pi \cdot R \cdot r$$

$$\Rightarrow R = \frac{A}{\pi \cdot r}; \quad r = \frac{A}{\pi \cdot R}$$

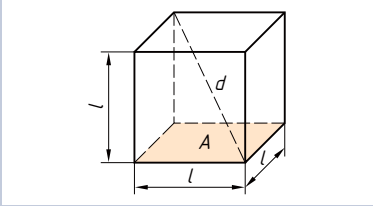
$$u \approx \frac{D+d}{2};$$

$$u \approx \pi \cdot (R+r)$$

3 Körper-, Volumen- und Masseberechnungen

3.1 Volumen und Oberflächen

Würfel



V Volumen
 A Grundfläche
 l Kantenlänge
 A_0 Oberfläche
 d Raumdiagonale

$$V = A \cdot l \quad \Rightarrow A = \frac{V}{l}; \quad l = \frac{V}{A}$$

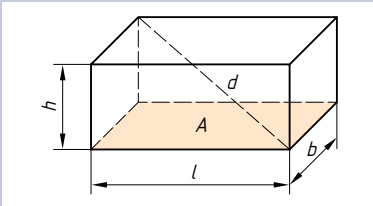
$$V = l^3 \quad \Rightarrow l = \sqrt[3]{V} = V^{\frac{1}{3}}$$

$$A_0 = 6 \cdot l^2 \quad \Rightarrow l = \sqrt{\frac{A_0}{6}}$$

$$d = l \cdot \sqrt{3} \quad \Rightarrow l = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

$$A = l^2$$

Prisma



V Volumen
 A Grundfläche
 h Höhe
 l Länge
 b Breite
 A_0 Oberfläche
 d Raumdiagonale

$$V = A \cdot h \quad \Rightarrow A = \frac{V}{h}; \quad h = \frac{V}{A}$$

$$V = l \cdot b \cdot h \quad \Rightarrow l = \frac{V}{b \cdot h}; \quad b = \frac{V}{l \cdot h};$$

$$h = \frac{V}{l \cdot b}$$

$$A_0 = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$$

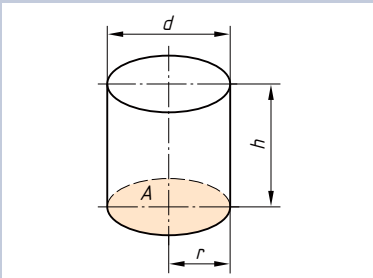
$$d = \sqrt{l^2 + h^2 + b^2} \quad \Rightarrow h = \sqrt{d^2 - l^2 - b^2}$$

$$l = \sqrt{d^2 - h^2 - b^2}$$

$$A = l \cdot b$$

$$b = \sqrt{d^2 - l^2 - h^2}$$

Zylinder



V Volumen
 A Grundfläche
 h Höhe
 d Durchmesser
 r Radius
 A_0 Oberfläche

$$V = A \cdot h \quad \Rightarrow h = \frac{V}{A}; \quad A = \frac{V}{h}$$

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h \quad \Rightarrow h = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2}; \quad d = \sqrt{\frac{4 \cdot V}{\pi \cdot h}}$$

$$A_0 = \pi \cdot d \cdot h + \frac{\pi \cdot d^2}{2} \quad \Rightarrow h = \frac{A_0}{\pi \cdot d} - \frac{d}{2}$$

$$A = \pi \cdot r^2$$

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

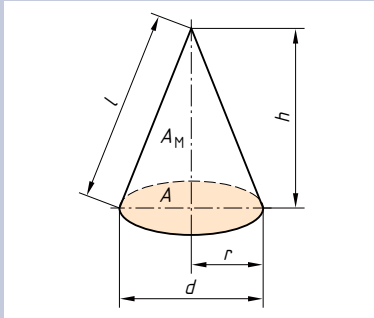
$$\pi = 3,1415 \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = 0,785 \dots$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot V}{\pi \cdot h}}$$

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot (A_0 - \pi \cdot d)}{\pi}}$$

Kegel



- V Volumen
 A Grundfläche
 A_M Mantelfläche
 A_0 Oberfläche
 h Höhe
 d Durchmesser
 r Radius
 l Länge der Mantellinie

$$V = \frac{A \cdot h}{3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3 \cdot V}{h}; \quad h = \frac{3 \cdot V}{A}$$

$$V = \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{12 \cdot V}{\pi \cdot h}}; \quad h = \frac{12 \cdot V}{\pi \cdot d^2}$$

$$A_M = \pi \cdot r \cdot l$$

$$\Rightarrow r = \frac{A_M}{\pi \cdot l}; \quad l = \frac{A_M}{\pi \cdot r}$$

$$A_0 = \pi \cdot (l \cdot r + r^2)$$

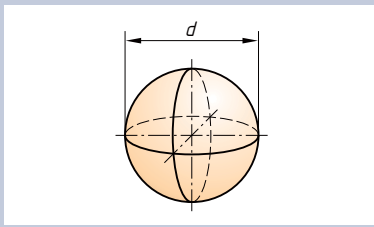
$$\Rightarrow l = \frac{A_0}{\pi \cdot r} - r$$

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \pi \cdot r^2$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$A_0 = A_M + A$$

Kugel



V Volumen

d Durchmesser

A_0 Oberfläche

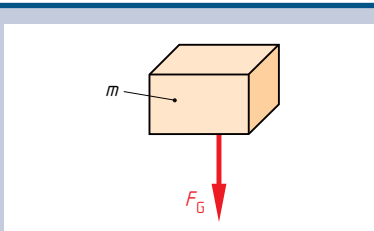
$$V = \frac{\pi \cdot d^3}{6}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot V}{\pi}}$$

$$A_0 = \pi \cdot d^2$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$$

3.2 Masse und Gewichtskraft



- V Volumen
 m Masse
 ρ Dichte
 F_G Gewichtskraft
 g Fallbeschleunigung (9,81 m/s²)

i Werte für Dichte ρ : Seite 117

$$m = \rho \cdot V$$

$$\Rightarrow V = \frac{m}{\rho}; \quad \rho = \frac{m}{V}$$

$$F_G = m \cdot g$$

$$F_G = \rho \cdot V \cdot g$$

$$\Rightarrow V = \frac{F_G}{\rho \cdot g}; \quad \rho = \frac{F_G}{V \cdot g}$$

$$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}; \quad [m] = \text{kg}$$

$$1 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

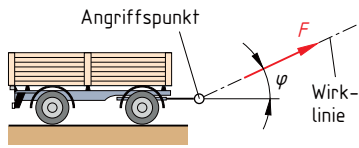
$$[F_G] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$$



4 Mechanik

4.1 Kräfte

Einheit, Darstellung



Formelzeichen: F

Einheit: $[F] = \text{N}$

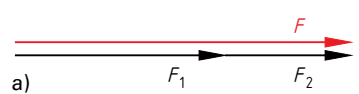
Einheitenname: Newton

Kräftemaßstab: z. B. $200 \text{ N} \triangleq 10 \text{ mm}$

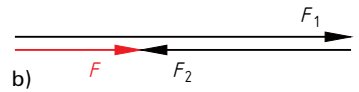
Betrag der Kraft \triangleq Länge des Pfeils

Richtung der Kraft \triangleq Richtung des Pfeils

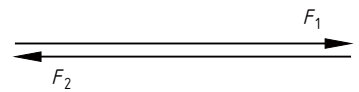
Zusammensetzen von zwei Kräften



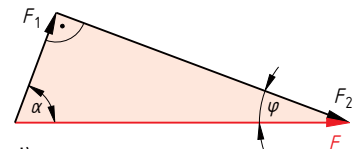
a)



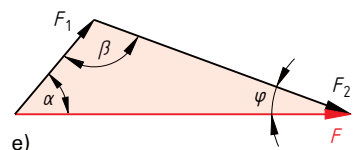
b)



c)



d)



e)

F_1, F_2, \dots Teilkräfte, Komponenten
 F Gesamtkraft, resultierende Kraft, Ersatzkraft


φ Winkel zwischen Teilkraft und Ersatzkraft



α Winkel zwischen den Teilkräften

β Winkel im Kräfteck $\beta = 180^\circ - \alpha - \varphi$



In den Formeln sind für F_1, F_2 und F Beträge einzusetzen.

 arccos, Eingabemodus:

 2nd  cos

a) Teilkräfte gleichgerichtet:

$$F = F_1 + F_2 \quad \Rightarrow F_1 = F - F_2; \quad F_2 = F - F_1$$

b) Teilkräfte entgegengerichtet:

$$F = F_1 - F_2 \quad \Rightarrow F_1 = F + F_2; \quad F_2 = F_1 - F$$

c) Gleichgewichtsbedingung:

$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow F_1 - F_2 = 0$$

d) Teilkräfte senkrecht aufeinander:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad \Rightarrow F_1 = \sqrt{F^2 - F_2^2}; \quad F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2}$$

$$F = \frac{F_1}{\cos \alpha} \quad \Rightarrow F_1 = F \cdot \cos \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{F_1}{F}$$

$$F = \frac{F_2}{\cos \varphi} \quad \Rightarrow F_2 = F \cdot \cos \varphi; \quad \cos \varphi = \frac{F_2}{F}$$

e) Teilkräfte nicht senkrecht aufeinander:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \beta}$$

$$\Rightarrow \beta = \arccos \cdot \left(\frac{F_1^2 + F_2^2 - F^2}{2 \cdot F_1 \cdot F_2} \right)$$

$$F_1 = \sqrt{F + F_2^2 - 2 \cdot F \cdot F_2 \cdot \cos \varphi}$$

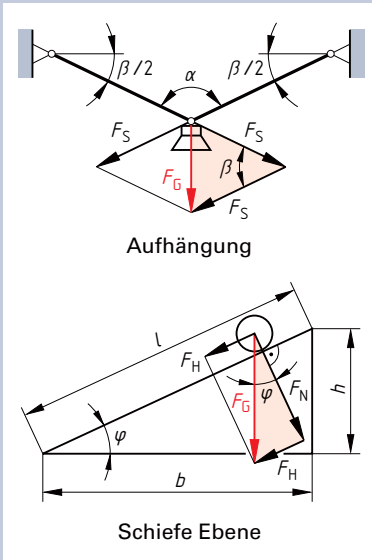
$$\Rightarrow \varphi = \arccos \cdot \left(\frac{F^2 + F_2^2 - F_1^2}{2 \cdot F \cdot F_2} \right)$$

$$F_2 = \sqrt{F^2 + F_1^2 - 2 \cdot F \cdot F_1 \cdot \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \cdot \left(\frac{F^2 + F_1^2 - F_2^2}{2 \cdot F \cdot F_1} \right)$$



Zerlegen einer Kraft in zwei Teilkraften (Komponenten)



$$\beta = 180^\circ - \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 180^\circ - \beta$$

$$F_S = \frac{F_G}{\sqrt{2 \cdot (1 - \cos \beta)}} \quad \Rightarrow \quad F_G = F_S \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \beta)}$$

$$\cos \beta = 1 - \frac{F_G^2}{2 \cdot F_S^2}$$

$$F_H = F_G \cdot \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad F_G = \frac{F_H}{\sin \varphi}$$

$$\sin \varphi = \frac{h}{l} \quad F_H = F_G \cdot \frac{h}{l}; \quad F_G = \frac{F_H \cdot l}{h}$$

$$F_N = F_G \cdot \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad F_G = \frac{F_N}{\cos \varphi}$$

$$\cos \varphi = \frac{b}{l} \quad F_N = F_G \cdot \frac{b}{l}; \quad F_G = \frac{F_N \cdot l}{b}$$

$$F_H = F_N \cdot \tan \varphi \quad \Rightarrow \quad F_N = \frac{F_H}{\tan \varphi}$$

$$\tan \varphi = \frac{h}{b} \quad F_H = F_N \cdot \frac{h}{b}; \quad F_N = \frac{F_H \cdot b}{h}$$

F_G Gewichtskraft

F_S Seilkräfte

α Winkel zwischen den Seilkräften

β Winkel im Krafteck

F_H Hangabtriebskraft

F_N Normalkraft

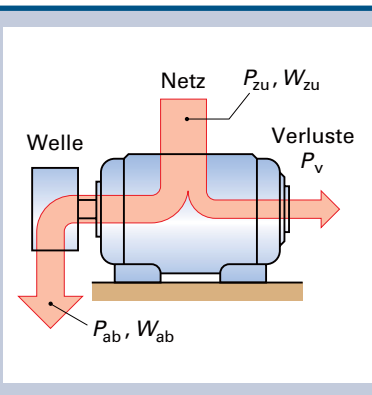
l Länge der schiefen Ebene

b Basislänge der schiefen Ebene

h Höhenunterschied

φ Neigungswinkel der schiefen Ebene

4.2 Wirkungsgrad, Arbeitsgrad



$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \quad \Rightarrow \quad P_{ab} = \eta \cdot P_{zu}; \quad P_{zu} = \frac{P_{ab}}{\eta}$$

$$P_v = P_{zu} - P_{ab} \quad \Rightarrow \quad P_{ab} = P_{zu} - P_v$$

$$P_{zu} = P_{ab} + P_v$$

$$\zeta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} \quad \Rightarrow \quad W_{ab} = \zeta \cdot W_{zu}$$

$$W_{zu} = \frac{W_{ab}}{\zeta}$$

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \dots \quad \Rightarrow \quad \eta_1 = \frac{\eta}{\eta_2 \cdot \eta_3 \dots}$$

η^* Wirkungsgrad (Leistungsverhältnis)

P_{ab} abgegebene Leistung (statt P_{ab} auch: P_2)

P_{zu} zugeführte Leistung (statt P_{zu} auch: P_1)

P_v Verlustleistung

ζ^{**} Arbeitsgrad, Nutzungsgrad (Arbeits-, Energieverhältnis)

W_{ab} abgegebene Energie

W_{zu} zugeführte Energie

η Gesamtwirkungsgrad

$\eta_1, \eta_2 \dots$ Einzelwirkungsgrade

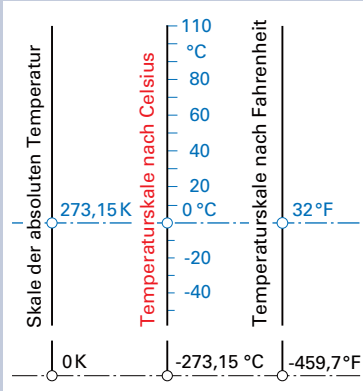
* η griech. Kleinbuchstabe eta

** ζ griech. Kleinbuchstabe zeta



5 Wärmelehre

5.1 Temperatur



- ϑ Temperatur in Grad Celsius
 T Temperatur in Kelvin
 $\Delta\vartheta, \Delta T$ Temperaturdifferenz in Kelvin
 ϑ_F Temperatur in Grad Fahrenheit

$$T = \left(273 + \frac{\vartheta}{^\circ\text{C}} \right) \text{K} \quad \Rightarrow \vartheta = \left(\frac{T}{\text{K}} - 273 \right) ^\circ\text{C}$$

$$\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1 \quad \Rightarrow \vartheta_2 = \vartheta_1 + \Delta\vartheta; \vartheta_1 = \vartheta_2 - \Delta\vartheta$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 \quad \Rightarrow T_2 = T_1 + \Delta\vartheta; T_1 = T_2 - \Delta\vartheta$$

$$\vartheta_F = \frac{9}{5} \vartheta + 32 \text{ } ^\circ\text{F} \quad \Rightarrow \vartheta = \frac{5}{9} \cdot (\vartheta_F - 32 \text{ } ^\circ\text{F})$$

Absoluter Nullpunkt:

$$T_0 = 0 \text{ K} \triangleq \vartheta_0 = -273,15 \text{ } ^\circ\text{C} \approx -273 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Eispunkt des Wassers:

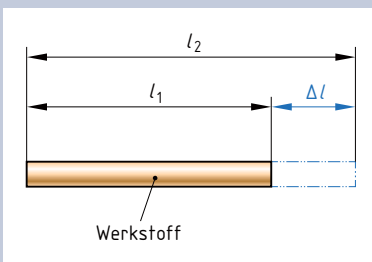
$$T_1 = 273,15 \text{ K} \approx 273 \text{ K} \triangleq \vartheta_1 = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$[\vartheta] = ^\circ\text{C}$$

$$[T] = \text{K}$$

$$[\Delta\vartheta] = [\Delta T] = ^\circ\text{C} = \text{K}$$

5.2 Wärmedehnung



- $\Delta l, \Delta V$ Längen- bzw. Volumenänderung
 l_1, V_1 Länge bzw. Volumen in kaltem Zustand
 l_2, V_2 Länge bzw. Volumen in erwärmtem Zustand
 $\Delta\vartheta$ Temperaturdifferenz
 α_1 Längenausdehnungskoeffizient
 γ Volumenausdehnungskoeffizient

i Weitere Werte für α_1 : Seite 117

$$\Delta l = \alpha_1 \cdot l_1 \cdot \Delta\vartheta \quad \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\Delta l}{l_1 \cdot \Delta\vartheta}; \quad l_1 = \frac{\Delta l}{\alpha_1 \cdot \Delta\vartheta}$$

$$\Delta l = l_2 - l_1 \quad \Delta\vartheta = \frac{\Delta l}{\alpha_1 \cdot l_1}$$

$$\Delta V = \gamma \cdot V_1 \cdot \Delta\vartheta \quad \Rightarrow \gamma = \frac{\Delta V}{V_1 \cdot \Delta\vartheta}; \quad V_1 = \frac{\Delta V}{\gamma \cdot \Delta\vartheta}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 \quad \Delta\vartheta = \frac{\Delta V}{\gamma \cdot V_1}$$

$$l_2 = l_1 \cdot (1 + \alpha_1 \cdot \Delta\vartheta) \quad \Rightarrow l_1 = \frac{l_2}{1 + \alpha_1 \cdot \Delta\vartheta}$$

$$V_2 = V_1 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta\vartheta) \quad \Rightarrow V_1 = \frac{V_2}{1 + \gamma \cdot \Delta\vartheta}$$

$$\gamma \approx 3 \cdot \alpha_1 \quad \Rightarrow \alpha_1 \approx \frac{1}{3} \cdot \gamma$$

$$[\alpha_1] = [\gamma] = \frac{1}{^\circ\text{C}} = \frac{1}{\text{K}}$$

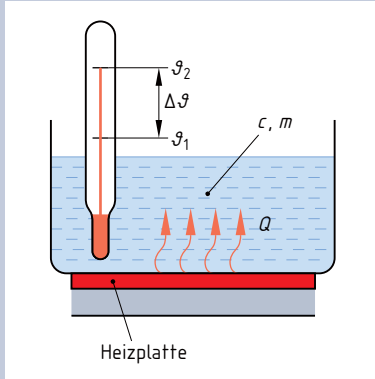
Längenausdehnungskoeffizient α_1 in $\frac{1}{\text{K}}$

Kupfer	Aluminium	Silber	Eisen	Lithium
$17 \cdot 10^{-6}$	$23,8 \cdot 10^{-6}$	$19,3 \cdot 10^{-6}$	$11,5 \cdot 10^{-6}$	$56 \cdot 10^{-6}$



5.3 Wärmemenge

Wärmeaufnahme und Wärmeabgabe bei Temperaturänderung



Q Wärme, Wärmemenge

m Masse

$\Delta\vartheta$ Temperaturdifferenz

ϑ_1 Anfangstemperatur

ϑ_2 Endtemperatur

c spezifische Wärmekapazität

C_{th} Wärmekapazität



- Weitere Werte für c : Seite 117
- Elektrowärme: Seite 27

$$\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1 \quad \Rightarrow \vartheta_2 = \vartheta_1 + \Delta\vartheta; \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 - \Delta\vartheta$$

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta \quad \Rightarrow c = \frac{Q}{m \cdot \Delta\vartheta}; \quad m = \frac{Q}{c \cdot \Delta\vartheta};$$

$$\Delta\vartheta = \frac{Q}{c \cdot m}$$

$$C_{th} = c \cdot m \quad \Rightarrow c = \frac{C_{th}}{m}; \quad m = \frac{C_{th}}{c}$$

$$Q = C_{th} \cdot \Delta\vartheta \quad \Rightarrow C_{th} = \frac{Q}{\Delta\vartheta}; \quad \Delta\vartheta = \frac{Q}{C_{th}}$$

$$[c] = \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

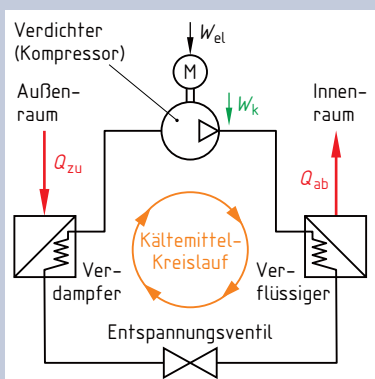
$$[C_{th}] = \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Spezifische Wärmekapazität c in $\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

Stoff	Wert	Stoff	Wert
Wasser	4,187	Aluminium	0,921
Kupfer	0,389	Eisen	0,461
Silber	0,234	Messing	0,377
Wasserstoff	14,277	Luft	1,005

5.4 Wärme-Kreisprozess

Wärmepumpe (Funktionsschema)



$$Q_{ab} = Q_{zu} + W_k \quad \Rightarrow Q_{zu} = Q_{ab} - W_k;$$

$$W_k = Q_{ab} - Q_{zu}$$

- i** Eine Wärmepumpe bringt die vom Außenraum zugeführte Wärme Q_{zu} von einer niedrigen Temperatur auf eine höhere Temperatur und gibt sie im Innenraum als Heizwärme Q_{ab} ab.

$$\beta = \frac{Q_{Jahr}}{W_{Jahr}} \quad \Rightarrow Q_{Jahr} = \beta \cdot W_{Jahr};$$

$$W_{Jahr} = \frac{Q_{Jahr}}{\beta}$$

- i** Die Jahresarbeitszahl β ist ein Maß für die Wirtschaftlichkeit einer Wärmepumpe.

Typische Werte der Jahresarbeitszahl: $\beta = 3,5 \dots 5$

Q_{zu} zugeführte Wärme (Umweltwärme)

Q_{ab} abgegebene Wärme (Heizwärme)

Q_{Jahr} pro Jahr abgegebene Heizwärme

W_k Kompressionsarbeit

W_{el} zugeführte elektrische Energie

W_{Jahr} pro Jahr zugeführte elektr. Energie

β Jahresarbeitszahl

6 Elektrotechnische Grundlagen

6.1 Grundgesetze

Ohmsches Gesetz

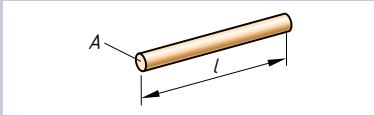


U Spannung
 I Stromstärke
 R Widerstand

$$I = \frac{U}{R} \quad \Rightarrow U = R \cdot I; \quad R = \frac{U}{I}$$

$[U] = \text{V}$
 $[I] = \text{A} \quad 1 \text{ A} = 1 \frac{\text{V}}{\Omega}$
 $[R] = \Omega$

Leiterwiderstand



R Leiterwiderstand
 A * Leiterquerschnitt
 l Leiterlänge
 γ^* elektr. Leitfähigkeit
 ρ spezifischer Widerstand
 $1 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} = 10^{-6} \Omega \text{m} = 10^{-4} \Omega \text{cm}$

* Nach DIN 1304:

Für Querschnitt auch S oder q , für elektr. Leitfähigkeit auch σ oder χ .

Bei Nichtleitern und Halbleitern:
 $[\rho] = \Omega \cdot \text{m}$

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A} \quad \Rightarrow l = \frac{R \cdot A}{\rho}; \quad A = \frac{\rho \cdot l}{R}$$

$$R = \frac{l}{\gamma \cdot A} \quad \Rightarrow l = R \cdot \gamma \cdot A; \quad A = \frac{l}{\gamma \cdot R}$$

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \quad \Rightarrow \rho = \frac{1}{\gamma}$$

Leiterwerkstoff	elektr. Leitfähigkeit	spez. Widerstand
Kupfer	$\gamma = 56 \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2}$	$\rho = 0,0178 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$
Aluminium	$\gamma = 36 \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2}$	$\rho = 0,0278 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$

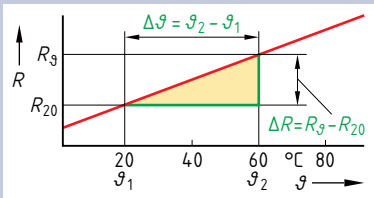
Widerstand und Leitwert

R Widerstand (Widerstandswert)
 G Leitwert

$$G = \frac{1}{R} \quad \Rightarrow R = \frac{1}{G}$$

$$[G] = \frac{1}{\Omega} = \text{S}$$

Widerstand und Temperatur



ΔR Widerstandsänderung
 R_θ Widerstand bei der Temperatur θ
 R_{20} Widerstand bei der Temperatur 20 °C
 θ Temperatur
 θ_1 Anfangstemperatur
 θ_2 Endtemperatur
 $\Delta \theta$ Temperaturdifferenz
 α Temperaturkoeffizient (Temperaturbeiwert)

i Weitere Werte für α , γ und ρ :
 Seite 117.

$$\Delta R = \alpha \cdot R_{20} \cdot \Delta \theta \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\Delta R}{R_{20} \cdot \Delta \theta}$$

$$R_\theta = R_{20} + \Delta R \quad \Rightarrow R_{20} = R_\theta - \Delta R;$$

$$R_\theta = R_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta \theta) \quad \Rightarrow R_{20} = \frac{R_\theta}{1 + \alpha \cdot \Delta \theta}$$

$$\Delta \theta = \frac{R_\theta - R_{20}}{\alpha \cdot R_{20}} \quad \Rightarrow R_\theta = R_{20} + \alpha \cdot R_{20} \cdot \Delta \theta$$

$[\Delta R] = \Omega; \quad \Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$
 $[\Delta \theta] = \text{K} = \text{°C}; \quad [\alpha] = \frac{1}{\text{K}} = \frac{1}{\text{°C}}$

Metall	α in 1/K	Metall	α in 1/K
Kupfer	0,0039	Nickelin	0,00015
Aluminium	0,004	Konstantan	0,00004