Rechenregeln 1

Vorzeichenregeln

Positives Produkt

$a \cdot b \quad = a \cdot b = b \cdot a = ab = ba$

$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab = ba$

$(+) \cdot (+) = (+)$ **1**

$(-) \cdot (-) = (+)$ **2**

Das Produkt ist positiv, wenn beide Faktoren das gleiche Vorzeichen besitzen. Der Multiplikationspunkt vor Buchstaben darf entfallen, nicht aber vor Zahlen.

Negatives Produkt

$a \cdot (-b) = -a \cdot b = -ab$

$(-a) \cdot b = -a \cdot b = -ab$

$(+) \cdot (-) = (-)$ **3**

Das Produkt ist negativ, wenn beide Faktoren ungleiche Vorzeichen besitzen. Der Multiplikationspunkt vor Buchstaben darf entfallen, nicht aber vor Zahlen.

Positiver Quotient

$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

$(+) : (+) = (+)$ **4**

$(-) : (-) = (+)$ **5**

Der Quotient ist positiv, wenn Dividend (Zähler) und Divisor (Nenner) gleiche Vorzeichen besitzen.

Negativer Quotient

$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \qquad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

$(+) : (-) = (-)$ **6**

Der Quotient ist negativ, wenn Dividend (Zähler) und Divisor (Nenner) ungleiche Vorzeichen besitzen.

Punktrechnungen, Strichrechnungen

$2\,a \cdot b - 4\,c \cdot 2\,d = 2\,ab - 8\,cd$

Punktrechnungen (· und :) müssen vor Strichrechnungen (+ und –) ausgeführt werden.

Regeln der Bruchrechnung

Addition, Subtraktion gleichnamiger Brüche

$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} - \frac{z}{a} = \frac{x + y - z}{a}$

Bei gleichnamigen Brüchen werden die Zähler addiert bzw. subtrahiert.

(Fortsetzung Regeln der Bruchrechnung)

Addition, Subtraktion ungleichnamiger Brüche

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{xb + ya}{ab}$

Hauptnenner: *ab*

Der Hauptnenner muss gebildet werden. Durch Erweitern der Brüche werden diese auf den Hauptnenner gebracht. Anschließend kann addiert bzw. subtrahiert werden.

Multiplikation von Brüchen

$\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} = \frac{xy}{ab}$ **7**

Zähler und Nenner werden jeweils getrennt multipliziert.

Division von Brüchen

$\frac{x}{a} : \frac{y}{b} = \frac{x/a}{y/b} = \frac{x \cdot b}{a \cdot y}$

Der Dividend $\frac{x}{a}$ wird mit dem Kehrwert des Divisors $\frac{y}{b}$ multipliziert.

Kürzen, Erweitern von Brüchen

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$

$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$

Der Wert eines Bruchs bleibt unverändert, wenn Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert werden.

Regeln der Klammerrechnung

Pluszeichen vor Klammer

$a + (b - c) = a + b - c$

Ein Pluszeichen vor einer Klammer erlaubt das Weglassen der Klammer.

Minuszeichen vor Klammer

$a - (b - c) = a - b + c$

Ein Minuszeichen vor einer Klammer bewirkt, dass bei Weglassen der Klammer aus Pluszeichen in der Klammer Minuszeichen und aus Minuszeichen Pluszeichen werden.

Multiplikation eines Faktors mit einem Klammerausdruck

$a \cdot (b + c) = ab + ac$

Jedes Glied der Klammer wird mit dem Faktor multipliziert.

(Fortsetzung Regeln d. Klammerrechnung)

Multiplizieren von Klammerausdrücken

$(a + b) \cdot (c - d) = ac - ad + bc - bd$

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ **8**

Jedes Glied der Klammer wird mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert.

Quadrieren von Klammerausdrücken

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$

$\quad = a^2 + ab + ab + b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ **9**

$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$

$\quad = a^2 - ab - ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$ **10**

Beim Quadrieren von Klammerausdrücken ist auf die richtige Berechnung der Zeichen Plus und Minus zu achten (siehe Vorzeichenregeln).

Dividieren eines Klammerausdrucks

$(a + b) : c = \frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

$\frac{a - b}{a} = \frac{a}{a} - \frac{b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$

Jedes Glied der Klammer wird durch den Divisor dividiert.

Klammerauflösung, Punktrechnung, Strichrechnung

$a \cdot (2\,x - x) + b \cdot (5\,y + 2\,y)$

$= ax + b \cdot 7\,y = ax + 7\,by$

Die Klammerauflösung ist vor der Punktrechnung, diese wiederum vor der Strichrechnung auszuführen.

Regeln beim Potenzieren

Multiplizieren von Potenzen gleicher Basis

$a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$

$a^2 \cdot a^3 = a^{(2+3)} = a^5$

Die Exponenten werden addiert.

Dividieren von Potenzen gleicher Basis

$\frac{a^4}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^2$

$a^4 : a^2 = \frac{a^4}{a^2} = a^{(4-2)} = a^2$

Die Exponenten werden subtrahiert.

Siehe auch Umschlagseite am Buchende

(Fortsetzung nächste Seite)

Rechenregeln 2

(Fortsetzung Regeln beim Potenzieren)

Multiplizieren von Potenzen mit einem Faktor

$a \cdot 10^3 = a \cdot 1000 = 1000\,a$

$a \cdot 10^{-2} = a \cdot \frac{1}{100} = 0{,}01\,a$

Zuerst muss die Potenz berechnet werden, dann erfolgt die Multiplikation mit dem Faktor.

Potenz mit Exponent Null

$\boxed{a^0 = 1}$ 1

$(x + y)^0 = 1$

$3^0 = 1; \quad e^0 = 1$

Jede Potenz mit dem Exponent Null besitzt den Wert 1.

Potenzieren einer Potenz

$(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$

Die Exponenten werden bei gleicher Basis multipliziert.

Regeln beim Radizieren (Wurzelziehen)

Radikand als Produkt

$\sqrt[4]{a \cdot b} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b}$

Die Wurzel kann aus jedem Faktor oder aus dem Produkt gezogen werden.

Radikand als Summe, Differenz

$\sqrt{a - b} = \sqrt{(a - b)}$

Es kann nur aus dem Ergebnis einer Summe oder Differenz die Wurzel gezogen werden, solange der Radikand > 0.

Potenzschreibweise

$\boxed{\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}}$ 2

Eine Wurzel kann auch als Potenz geschrieben werden.

Addieren, Subtrahieren von Wurzeln

$a \cdot \sqrt[3]{x} + b \cdot \sqrt[3]{x} = (a + b) \cdot \sqrt[3]{x}$

$a \cdot \sqrt[4]{x} - b \cdot \sqrt[4]{x} = (a - b) \cdot \sqrt[4]{x}$

Die Wurzeln können addiert oder subtrahiert werden, wenn sie die gleiche Basis und den gleichen Exponent besitzen.

(Fortsetzung Regeln beim Radizieren)

Multiplizieren. Dividieren von Wurzeln

$\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}}$ 3

$\boxed{\sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$ 4

Das Produkt bzw. der Quotient der Radikanden wird radiziert, wenn die Radikanden den gleichen Wurzelexponent besitzen.

Radizieren einer Wurzel

$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$ 5

Die Exponenten der Wurzeln können zum Radizieren multipliziert werden.

Radizieren einer Potenz

$\boxed{\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}}$ 6

Der Exponent der Potenz wird durch den Wurzelexponent dividiert.

Regeln beim Umformen von Gleichungen

Zusätzliches Addieren auf beiden Seiten der Gleichung

$x - a = c$

$x - a + a = c + a$

$x = c + a$

Durch Addieren der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung bleibt die Gleichung erhalten.

Zusätzliches Subtrahieren auf beiden Seiten der Gleichung

$x + b = c$

$x + b - b = c - b$

$x = c - b$

Durch Subtrahieren der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung bleibt die Gleichung erhalten.

Zusätzliches Dividieren auf beiden Seiten der Gleichung

$a \cdot x = c$

$\frac{a \cdot x}{a} = \frac{c}{a}$

$x = \frac{c}{a}$

Durch Dividieren der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung bleibt die Gleichung erhalten.

(Fortsetzung Regeln beim Umformen von Gleichungen)

Zusätzliches Multiplizieren auf beiden Seiten der Gleichung

$\frac{x}{a} = b$

$\frac{x \cdot a}{a} = b \cdot a$

$x = b \cdot a$

Durch Multiplizieren der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung bleibt die Gleichung erhalten.

Potenzieren auf beiden Seiten der Gleichung

$x = a + b$

$x^2 = (a + b)^2$

$x^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

Durch gleiches Potenzieren auf beiden Seiten der Gleichung bleibt die Gleichung erhalten.

Radizieren auf beiden Seiten der Gleichung

$x^2 = a + b$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{a + b}$

$x = \pm\sqrt{a + b}$

Durch gleiches Radizieren auf beiden Seiten der Gleichung bleibt die Gleichung erhalten.

Regeln beim Umgang mit Ungleichungen

Seitentausch

$a > b + c$

$\Rightarrow \; b + c < a$

Multiplikation mit (–1)

$(b + c) < a$

$\Rightarrow \; (b + c) \cdot (-1) > a \cdot (-1)$

Kehrwertbildung

$a > b + c$

$\Rightarrow \; \frac{1}{a} < \frac{1}{b + c}$

Kehrwertbildung *und* Multiplikation mit (–1)

$a > b$	$c < d$
$\Rightarrow \; \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	$\Rightarrow \; \frac{1}{c} > \frac{1}{d}$
$\Rightarrow \; -\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}$	$\Rightarrow \; -\frac{1}{c} < -\frac{1}{d}$

Durch Vertauschen, Multiplizieren mit (–1) oder Kehrwertbildung der Seiten einer Ungleichung wird > zu < und < zu >.

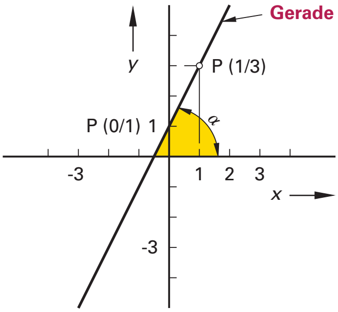
Rechenregeln 3

Funktionen

Linear-affine Funktion

Jedem x-Wert ist genau ein Funktionswert $y = f(x)$ zugeordnet.

$y = f(x) = mx + c$



$y = f(x) = 2x + 1$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{1-0} = 2$$

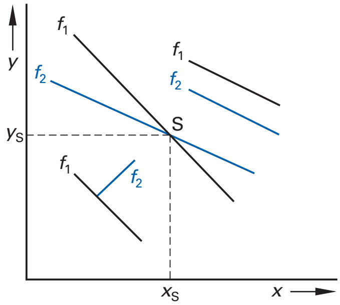
$c = y_1 - m \cdot x_1 = 1 - 2 \cdot 0 = 1$

$c = y_2 - m \cdot x_2 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$

bei gegebenem Winkel α:

$m = \tan \alpha$

Zwei Geraden



$y_1 = f_1(x) = m_1 x + c_1$

$y_2 = f_2(x) = m_2 x + c_2$

Parallele Geraden:

$m_1 = m_2$ $\quad c_1 <> c_2$

Senkrechte Geraden:

$m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ $\quad c_1, c_2$ beliebig

Schnittpunkt $S\,(x_S, y_S)$:

$x_S = \dfrac{c_1 - c_2}{m_2 - m_1}$ $\quad m_1 <> m_2$

$y_S = m_1 \cdot x_S + c_1$

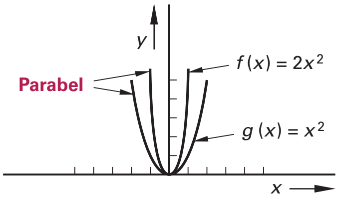
$y_S = m_2 \cdot x_S + c_2$

(Fortsetzung Regeln Funktionen)

Quadratische Funktion

Ein Funktionswert $y = f(x)$ kann an 2 verschiedenen Stellen x auftreten.

$y = f(x) = ax^2$ (Parabel)



$\boldsymbol{y = f(x) = 2x^2}$ **und** $\boldsymbol{y = g(x) = x^2}$

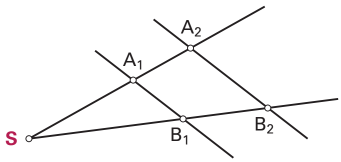
Strahlensätze

1. Strahlensatz

Schneiden parallele Geraden zwei von einem Schnittpunkt S ausgehende Strahlen, dann verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{SB_2}}$$

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{B_1B_2}}$$



2. Strahlensatz

Schneiden parallele Geraden zwei von einem Schnittpunkt S ausgehende Strahlen, dann verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die vom Schnittpunkt S aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf einem Strahl.

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}}$$

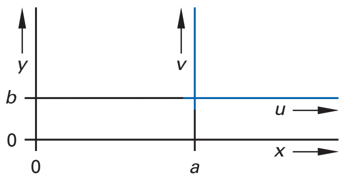
$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{SB_2}}$$

Koordinatensysteme

Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems

Altes Koordinatensystem: x, y mit Nullpunkt 0,0

neues Koordinatensystem: u, v mit Nullpunkt a, b



$x = u + a$ und $y = v + b$

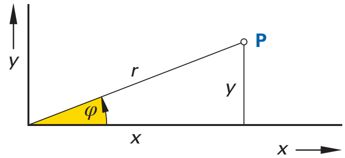
$u = x - a$ und $v = y - b$

(Fortsetzung Regeln Koordinatensysteme)

Kartesische Koordinaten *x, y* → Polarkoordinaten *r, φ*

Im Polarkoordinatensystem ist jeder Punkt P in einer Ebene durch einen Winkel φ und einen Abstand r definiert.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\quad \tan \varphi = \dfrac{y}{x}$



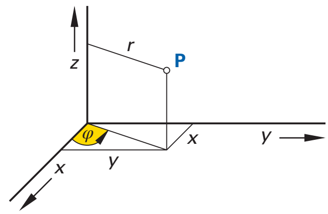
Polarkoordinaten → Kartesische Koordinaten

$x = r \cdot \cos \varphi$; $\quad y = r \cdot \sin \varphi$

Kartesische Koordinaten *x, y, z* → Zylinderkoordinaten *r, φ, z*

Ein Punkt P im Raum wird bei der Darstellung mittels Zylinderkoordinaten durch die beiden Abstandskoordinaten r und z sowie den Winkel φ beschrieben.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\quad \tan \varphi = \dfrac{y}{x}$; $\quad z = z$



Zylinderkoordinaten *r, φ, z* → Kartesische Koordinaten *x, y, z*

$x = r \cdot \cos \varphi$; $\quad y = r \cdot \sin \varphi$; $\quad z = z$

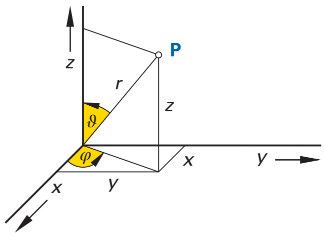
Kartesische Koordinaten → Kugelkoordinaten

Ein Punkt P im Raum wird bei der Darstellung mittels Kugelkoordinaten durch eine Abstandskoordinate r und zwei Winkelkoordinaten ϑ, φ beschrieben.

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

$\varphi = \arctan \dfrac{y}{x}$ für $x > 0$

$$\vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



Kugelkoordinaten → Kartesische Koordinaten

$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$; $\quad y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$;

$z = r \cdot \cos \vartheta$

Gleichungssysteme

Mit einer Unbekannten

Lineare Gleichung

$ax + b = 0$

$\Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

a, *b* sind Konstanten. $a \neq 0$

Es gibt für *x* einen Ergebniswert.

Quadratische Gleichung

$x^2 + px + q = 0$

$x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$

Es kann 2 Lösungen für *x* geben.

Mit zwei Unbekannten

Lineares Gleichungssystem 2. Grades

$ax + bx = c$ und

$dx + ey = f$

1. Lösung mit *Gleichsetzungsmethode*, d.h. beide Gleichungen nach z.B. $y = \ldots$ auflösen, dann gleichsetzen und nach $x = \ldots$ auflösen. Den ermittelten *x*-Wert dann in eine der beiden Gleichungen $y = \ldots$ einsetzen.

Beispiel Gleichsetzungsmethode:

$3x + 2y = 4$ und

$-2x + 3y = 1$

Auflösen nach *x*:

$x = (4 - 2y)/3$

$x = (3y - 1)/2$

Gleichsetzen der Gleichungen:

$(4 - 2y)/3 = (3y - 1)/2$

$-2y/3 - 3y/2 = -1/2 - 4/3$

$2y/3 + 3y/2 = 1/2 + 4/3$

$(4y + 9y)/6 = (3 + 8)/6$

$13y = 11 \Rightarrow y = 11/13 = 0{,}85$

Einsetzen von *y* in eine Gleichung:

$x = (4 - 2 \cdot 11/13)/3 = 0{,}77$

2. Lösung mit *Additionsmethode*, d.h. beide Gleichungen werden addiert. Zuvor wird jede Gleichung mit einem Faktor so multipliziert, dass *x* oder *y* den gleichen Koeffizienten aufweisen, sodass durch Addition oder Subtraktion der Gleichungen eine Variable entfällt.

Beispiel Additionsmethode:

$3x + 2y = 4$ und

$-2x + 3y = 1$

Durch Multiplikation mit 2 bzw. 3 erhält man in beiden Gleichungen 6*x*.

$6x + 4y = 8$

$-6x + 9y = 3$

$0 + 13y = 11 \Rightarrow y = 11/13$

$\Rightarrow x = (8 - 4 \cdot 11/13)/6 = 0{,}77$

$y = 0{,}85$

(Fortsetzung)

Determinantenverfahren
für lineares Gleichungssystem
2. Grades

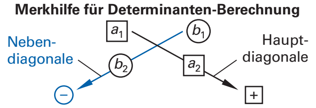
$a_1\,x + b_1\,y = c_1$

$a_2\,x + b_2\,y = c_2$

Determinante erstellen:

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

Merkhilfe für Determinanten-Berechnung



Von den Produkttermen der Hauptdiagonalen werden die Produktterme der Nebendiagonalen subtrahiert.

Determinante berechnen:

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$

x-Determinante berechnen:

$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2$

y-Determinante berechnen:

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot a_2$

x berechnen:

$\boxed{x = \dfrac{D_x}{D}}$ **1** für D <> 0

y berechnen:

$\boxed{y = \dfrac{D_y}{D}}$ **2** für D <> 0

Beispiel:

$3\,x + 2\,y = 4$

$-2\,x + 3\,y = 1$

Determinante berechnen:

$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2\,(-2) = 13$

x-Determinante berechnen:

$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 10$

y-Determinante berechnen:

$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) = 11$

x berechnen:

$x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{10}{13} = 0{,}77$

y berechnen:

$y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{11}{13} = 0{,}85$

Alle drei Verfahren führen zu gleichen Ergebnissen.

Mit drei Unbekannten

Determinantenverfahren
für lineares Gleichungssystem
3. Grades

$a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z = d_1$

$a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z = d_2$

$a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z = d_3$

Determinante erstellen:

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Determinante berechnen
$\Rightarrow$ Hauptdiagonalen minus Nebendiagonalen:

$D\!: \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$

$D = a_1\,b_2\,c_3 + b_1\,c_2\,a_3 + c_1\,a_2\,b_3 - (c_1\,b_2\,a_3 + a_1\,c_2\,b_3 + b_1\,a_2\,c_3)$

x-Determinante erstellen:

$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

x-Determinante berechnen
$\Rightarrow$ Hauptdiagonalen minus Nebendiagonalen:

$D_x\!: \left|\begin{matrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{matrix}$

$D_x = d_1\,b_2\,c_3 + b_1\,c_2\,d_3 + c_1\,d_2\,b_3 - (c_1\,b_2\,d_3 + d_1\,c_2\,b_3 + b_1\,d_2\,c_3)$

y-Determinante erstellen, berechnen
$\Rightarrow$ Hauptdiagonalen minus Nebendiagonalen:

$D_y\!: \left|\begin{matrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{matrix}$

$D_y = a_1\,d_2\,c_3 + d_1\,c_2\,a_3 + c_1\,a_2\,d_3 - (c_1\,d_2\,a_3 + a_1\,c_2\,d_3 + d_1\,a_2\,c_3)$

z-Determinante erstellen, berechnen
$\Rightarrow$ Hauptdiagonalen minus Nebendiagonalen:

$D_z\!: \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$

$D_z = a_1\,b_2\,d_3 + b_1\,d_2\,a_3 + d_1\,a_2\,b_3 - (d_1\,b_2\,a_3 + a_1\,d_2\,b_3 + b_1\,a_2\,d_3)$

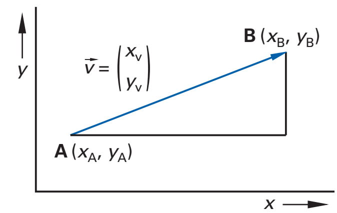
x, *y*, *z* berechnen für $D <> 0$:

$\boxed{x = \dfrac{D_x}{D}}$ **3** $\boxed{y = \dfrac{D_y}{D}}$ **4** $\boxed{z = \dfrac{D_z}{D}}$ **5**

x, *y*, *z* Unbekannte; a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 Koeffizienten von *x*, *y*; c_1, c_2, d_1, d_2, d_3 rechte Seiten der Gleichungen;
c_1, c_2, c_3 Koeffizienten von *z* in rechter Spalte

Rechnen mit Vektoren

Zweidimensional



Vektoren haben einen Betrag und eine Richtung. Der Betrag entspricht der Länge des Vektors. Vektoren werden durch Buchstaben und einen Pfeil dargestellt:

Vektor $\vec{v}$ mit Betrag *v* (Länge) (für $v > 0$)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}, \ |\vec{v}| = v = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$$

Vektor zwischen Punkten A und B:

$$A\,(x_A,\, y_A),\ B\,(x_B,\, y_B) \rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit Zahl c:

$$c \cdot \vec{v} = c \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_v \\ c \cdot y_v \end{pmatrix}$$

Addition von Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix}$$

Subtraktion von Vektoren:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{pmatrix}$$

Skalares Produkt von Vektoren:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

Wenn $\vec{a}$ senkrecht zu $\vec{b}$: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Wenn $\vec{a}$ parallel zu $\vec{b}$: $\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b$

Allgemein: $\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi$

φ ist der Winkel zwischen den zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{a \cdot b}$$

Rechenregeln:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

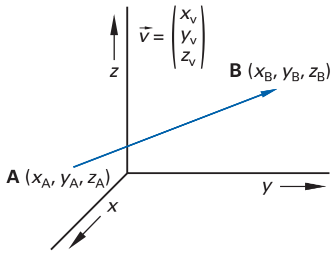
$$c\,(\vec{a} + \vec{b}) = c \cdot \vec{a} + c \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$$

$$c\,(\vec{a} \circ \vec{b}) = (c \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = \vec{a} \circ (c \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + c) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ c$$

Dreidimensional



Vektor $\vec{v}$ mit Betrag *v* (Länge) (für $v > 0$)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}, \ |\vec{v}| = v = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$$

Vektor zwischen Punkten A und B:

$$A\,(x_A, y_A, z_A),\ B\,(x_B, y_B, z_B) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit Zahl c:

$$c \cdot \vec{v} = c \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_v \\ c \cdot y_v \\ c \cdot z_v \end{pmatrix}$$

Addition von Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix}$$

Subtraktion von Vektoren:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{pmatrix}$$

Skalares Produkt von Vektoren:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

Wenn $\vec{a}$ senkrecht zu $\vec{b}$: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Wenn $\vec{a}$ parallel zu $\vec{b}$: $\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b$

Allgemein: $\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi$

φ ist der Winkel zwischen den zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Berechnung wie im zweidimensionalen Fall.

Rechenregeln: wie bei zweidimensional.

Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

Das Kreuzprodukt ist die Verknüpfung zweier Vektoren, dessen Ergebnis wieder ein Vektor ist, der senkrecht auf den beiden Vektoren steht.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a \cdot z_b - y_b \cdot z_a \\ x_b \cdot z_a - x_a \cdot z_b \\ x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a \end{pmatrix}$$

Allgemein: $\vec{a} \times \vec{b} = a \cdot b \cdot \sin\varphi$

(Fortsetzung)

Rechenregeln für Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + c) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times c$$

Wenn $\vec{a}$ parallel zu $\vec{b}$: $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$

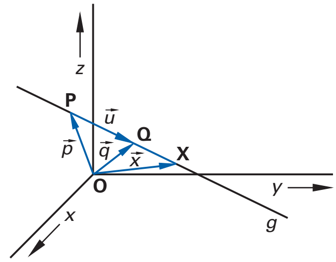
Wenn $\vec{a}$ senkrecht zu $\vec{b}$: $|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b$

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$:

Berechnung des cos φ wie im zweidimensionalen Fall.

Vektorgleichung einer Geraden im Raum:

Der Ortsvektor $\vec{x}$ geht zu einem beliebigen Punkt auf der Gerade g.



$$g\colon \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{q} - \vec{p}$$

- $\vec{p}$ Stützvektor; $\vec{u}$ Richtungsvektor;
- $\vec{q}$ Vektor Punkt O zu Punkt Q
- r Parameter, der $\vec{u}$ verlängert, verkürzt oder seine Richtung ändert, damit jeder Geradenpunkt X mit $\vec{x}$ beschrieben werden kann.
- O Koordinatenursprung
- P Stützpunkt, Aufpunkt auf Gerade
- Q gegebener Punkt auf Gerade
- X beliebiger Punkt auf Gerade

Beispiel:

Eine Gerade geht durch die Punkte P (2,4,3) und Q (– 3,0,2).

a) Wie lautet die Vektorgleichung der Geraden?

b) Welchen Punkt A erhält man, wenn $r = 2$ gewählt wird?

Lösung:

a)

$$g\colon \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3-2 \\ 0-4 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$g\colon \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

∘ Operator für skalare Multiplikation; × Operator für Kreuzprodukt

Differenzialrechnung, Integralrechnung

Differenzialrechnung (Ableitung)

Funktion	1. Ableitung
$f(x) = a$ (Konstante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$
$f(x) = 1/x$	$f'(x) = -1/x^2$
$f(x) = 1/x^n$	$f'(x) = -n/x^{n+1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = 1/(2 \cdot \sqrt{x})$
$f(x) = x\sqrt{x}$	$f'(x) = 3/2\sqrt{x}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = 1/(n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}})$
$f(x) = 1/\sqrt{x}$	$f'(x) = -1/(2 \cdot x\sqrt{x})$
$f(x) = a \cdot x^n$	$f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \sin ax$	$f'(x) = a \cdot \sin(ax + \pi/2)$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \cos ax$	$f'(x) = a \cdot \cos(ax + \pi/2)$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1/\cos^2 x$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -1/\sin^2 x$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -1/\sqrt{1 - x^2}$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = 1/(1 + x^2)$
$f(x) = \operatorname{arc\,cot} x$	$f'(x) = -1/(1 + x^2)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = 1/x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = 1/(x \cdot \ln a)$

Ableitungsregeln

Faktorregel:

$f(x) = a \cdot g(x)$ — $f'(x) = a \cdot g'(x)$

Summenregel:

$f(x) = g(x) + h(x)$ — $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Produktregel:

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ — $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

Kettenregel:

$f(x) = g(u(x))$ — $f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

äußere innere Ableitung

Beispiel 1 zu Kettenregel:

$f(x) = (3x - 5)^4$ — $f'(x) = 4 \cdot (3x - 5)^3 \cdot 3 = 12 \cdot (3x - 5)^3$

$u(x) = 3x - 5$ — $u'(x) = 3$

$g(u) = u^4$ — $g'(u) = 4 \cdot u^3$

Beispiel 2 zu Kettenregel:

$f(x) = e^{(2x-4)}$ — $f'(x) = e^{(2x-4)} \cdot 2 = 2 \cdot e^{(2x-4)}$

$u(x) = 2x - 4$ — $u'(x) = 2$

$g(u) = e^u$ — $g'(u) = e^u$

Integralrechnung

Zu integrierende Funktion	Integrierte Funktion
Nachfolgend gilt: $X = ax + b$	
$\int X^n\,dx$	$X^{n+1}/(a(n+1))$ für $n <> -1$
$\int dx/X$	$1/a \cdot \ln X$ auch für $a = -1$
$\int x \cdot X^n\,dx$	$X^{n+2}/(a^2(n+2)) - X^{n+1}/(a^2(n+1))$
$\int x\,dx/X$	$x/a - b/a^2 \cdot \ln X$
$\int x\,dx/X^2$	$b/(a^2 \cdot X) + 1/a^2 \cdot \ln X$
$\int x^2\,dx/X^2$	$(X - 2b \cdot \ln X - b^2/X)/a^3$
$\int dx/(x \cdot X)$	$-1/b \cdot \ln(X/x)$
$\int dx/(x \cdot X^2)$	$-1/b^2 \cdot (\ln(X/x) - b/X)$
Nachfolgend gilt: $X = a^2 + x^2$	
$\int dx/X$	$1/a \cdot \arctan(x/a)$
$\int x\,dx/X$	$\pm 1/2 \cdot \ln X$
$\int dx/X^2$	$x/(2a^2 \cdot X) + 1/(2a^3) \cdot \arctan(x/a)$
Integrale mit Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens	
$\int \sin ax\,dx$	$-1/a \cdot \cos ax$
$\int \sin^2 ax\,dx$	$x/2 - 1/(4a) \cdot \sin 2ax$
$\int x \cdot \sin ax\,dx$	$(\sin ax)/a^2 - (x \cdot \cos ax)/a$
$\int x^2 \sin ax\,dx$	$(2x \cdot \sin ax)/a^2 - (x^2/a - 2/a^3) \cdot \cos ax$
$\int \cos ax\,dx$	$1/a \cdot \sin ax$
$\int \cos^2 ax\,dx$	$x/2 + 1/(4a) \cdot \sin 2ax$
$\int x \cdot \cos ax\,dx$	$(\cos ax)/a^2 + (x \cdot \sin ax)/a$
$\int x^2 \cos ax\,dx$	$(2x \cdot \cos ax)/a^2 + (x^2/a - 2/a^3) \cdot \sin ax$
$\int \sin ax \cos ax\,dx$	$1/(2a) \cdot \sin^2 ax$
$\int \sin^2 ax \cos^2 ax\,dx$	$x/8 - (\sin 4ax)/(32a)$
$\int \tan ax\,dx$	$-1/a \cdot \ln \cos ax$
$\int \tan^2 ax\,dx$	$(\tan ax)/a - x$
$\int \cot ax\,dx$	$1/a \cdot \ln \sin ax$
$\int \cot^2 ax\,dx$	$(-\cot ax)/a - x$
Integrale mit e-Funktion, Logarithmus	
$\int e^{ax}\,dx$	$1/a \cdot e^{ax}$
$\int x \cdot e^{ax}\,dx$	$e^{ax}/a^2 \cdot (ax - 1)$
$\int x^2 \cdot e^{ax}\,dx$	$e^{ax}(x^2/a - 2x/a^2 + 2/a^3)$
$\int \ln x\,dx$	$x \ln x - x$
$\int (\ln x)^2\,dx$	$x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$

Anmerkungen:

Das Integrieren ist die Umkehrung vom Differenzieren. Wird die integrierte Funktion abgeleitet, so erhält man die zu integrierende Funktion.

Das angewendete Divisionszeichen „/" erfordert das Beachten von Klammer-Ausdrücken und entspricht dem Divisionszeichen Bruchstrich:

$a - b/c + (a - b)/c - cd/(e - f) \cdot g - h/i \cdot \sin ax =$

$$a - \frac{b}{c} + \frac{a-b}{c} - \frac{cdg}{e-f} - \frac{h \cdot \sin ax}{i}$$

Rechnen mit Excel

Grundrechenarten

Addition + , Subtraktion –, Multiplikation *, Division /

Bei einer Rechenanweisung muss eine Zelle mit = beginnen.

= Operand 1 Operator Operand 2

Beispiele:

Zelleninhalte A1=5, B3=2, C3=3

Zahlen	Zellen	Klammern
=5*3	=A1–B3	=5*(A1–B3)*C3

Ergebnisse:

15	3	5

Summenbildung

- Berechnen der Summe der Zelleninhalte von Zelle 1 bis Zelle *n*.
  =SUMME(Zelle1:Zelle *n*)

Beispiel:

Zelleninhalt jeweils 1 in A1 bis A10

=SUMME(A1:A10)

Ergebnis: 10

- Berechnen der Summe von Zahlen und/oder Zelleninhalten.
  =SUMME(Zelle *a*;Zelle *b*;Zelle c; ...)

Summe Wenn ...

Addieren von Zahlen eines Bereichs, die einer Bedingung entsprechen, z. B. Addieren aller Zahlen > 5.

=SUMMEWENN(Zelle1:Zelle *n*; "Bedingung")

Beispiel:

Zelleninhalt jeweils 1 in A1 bis A8, A9=5, A10=6

=SUMMEWENN(A1:A10;">=5")

Ergebnis: 11

Produktbildung

Bilden des Produkts von Zahlen und/oder Zahlen in Zellen.

=PRODUKT(Zelle *a*;Zelle *b*;Zelle *c*; ...)

Beispiel:

Inhalte der Zellen A1=4, A5=2, B3=2

=PRODUKT(A1;A5;B3)

Ergebnis: 16

Quotientenbildung

Bilden des Quotienten und Abschneiden der Nachkommastellen.

=QUOTIENT(Zelle *a* Dividend; Zelle *b* Divisor)

Beispiel:

Inhalte der Zellen A1=5, A5=3

=QUOTIENT(A1;A5)

Ergebnis: 1

Restwertermittlung

Restwert bei Division wird berechnet.

=REST(Zelle *a* Dividend, Zelle *b* Divisor)

Beispiel:

Inhalt Zellen A1=5, A2=2

=REST(A1;A2)

Ergebnis: 1

Erweiterte Rechenarten

Potenzrechnung

Berechnen einer potenzierten Zahl.

=POTENZ(Zelle *a* Wert Basis;Zelle *b* Exponent)

Beispiel:

Zelleninhalte A1=2, B1=3

=POTENZ(A1;B1)

Ergebnis: 8

Wurzelberechnung (Radizieren)

Berechnen einer Quadratwurzel einer Zahl oder Zahl einer Zelle.

=WURZEL(Zelle)

Beispiel:

Inhalt Zelle A1=4

=WURZEL(A1)

Ergebnis: 2

Logarithmusberechnung

Berechnen des Logarithmuswertes einer Zahl oder Zahl einer Zelle zu einer Basis.

=Log(Zelle *a*;Zelle *b* Wert Basis)

Beispiel:

Zelleninhalte A1=100, B1=10

=LOG(A1;B1)

Ergebnis: 2

Zehnerlogarithmus (Basis10)

=LOG10(Zelle)

Natürlicher Logarithmus (Basis e=2,718)

=LN(Zelle)

Exponentenfunktion

Berechnen eines Potenzwertes, ausgehend von der Basis e (2,718) und einem Exponent als Zahl oder Zahl einer Zelle.

=EXP(Zelle)

Beispiel:

Inhalt Zelle A1=5

=EXP(A1)

Ergebnis: 148,413

Mittelwertbildung

Der Mittelwert von Zahlen und/oder Zahlen in Zellen wird berechnet.

=MITTELWERT(Zelle *a*;Zelle *b*;Zelle *c*; ...)

Beispiel:

Inhalt Zellen A1=4, B1=6

=MITTELWERT (A1;B1)

Ergebnis: 5

UND-Funktion

Es werden Zellen/Zahlen mit anderen Zellen/Zahlen verglichen. Als Ergebnis wird WAHR oder FALSCH angezeigt.

=UND (Zelle *a* Bedingung; Zelle *b* Bedingung)

Beispiel:

Inhalt Zellen A1=5, B1=2

=UND(A1<10;B1>1)

Ergebnis: WAHR

Rundungsfunktionen

Runden

Eine Zahl wird auf eine angegebene Anzahl Dezimalstellen gerundet.

=RUNDEN (Zelle *a* Zahl;Zelle *b* Anzahl Stellen)

Beispiel:

Zelleninhalte A1=1,195; B1=1

=RUNDEN(A1;B1)

Ergebnis: 1,2

Abrunden

Eine Zahl wird immer abgerundet.

=ABRUNDEN(Zelle *a* Zahl;Zelle *b* Anzahl Stellen)

Aufrunden

Eine Zahl wird immer aufgerundet.

=AUFRUNDEN(Zelle *a* Zahl;Zelle *b* Anzahl Stellen)

Kürzen

Eine Zahl wird mit einer angegebenen Anzahl Nachkommastellen ausgegeben.

=KÜRZEN(Zelle *a*; Zelle *b*)

Beispiel:

Zelleninhalte A1=5,126, B1=2

=KÜRZEN(A1;B1)

Ergebnis: 5,12

Ganzzahl

Eine Zahl wird auf die nächstkleinere ganze Zahl abgerundet.

=GANZZAHL(Zelle *a*)

Gerade

Eine Zahl wird auf die nächsthöhere ganze Zahl aufgerundet.

=GERADE(Zelle *a*)

Trigonometrische Funktionen

sin, cos, tan, cot

Berechnen der entsprechenden Werte eines Winkels im Bogenmaß (Radiant).

=SIN(Zelle)

Beispiel:

Inhalt Zelle A1=0,5236

=SIN(A1)

Ergebnis: 0,5

arcsin, arccos, arctan, arccot

Berechnen eines Winkels im Bogenmaß (Radiant).

=ARCSIN(Zelle)

Bogenmaß

Berechnen eines Winkels im Bogenmaß.

=BOGENMASS(Zelle)

Grad

Berechnen eines Winkelwertes in Grad.

=GRAD(Zelle)

Zahlensysteme, Rechenregeln bei Dualzahlen, Umrechnungen

Zahlensysteme

Dezimal	Dual	Oktal	Sedez.	Dezimal	Dual	Oktal	Sedez.
0	0	0	0	9	1 0 0 1	11	9
1	0 1	1	1	10	1 0 1 0	12	A
2	1 0	2	2	11	1 0 1 1	13	B
3	1 1	3	3	12	1 1 0 0	14	C
4	1 0 0	4	4	13	1 1 0 1	15	D
5	1 0 1	5	5	14	1 1 1 0	16	E
6	1 1 0	6	6	15	1 1 1 1	17	F
7	1 1 1	7	7	16	1 0 0 0 0	20	10
8	1 0 0 0	10	8	17	1 0 0 0 1	21	11

Bemerkungen

Basis im Dezimalsystem:	10
Basis im Dualsystem:	2
Basis im Oktalsystem:	8
Basis im Hexadezimalsystem (Sedezimalsystem):	16
Für Dualsystem:	
1. Stelle links vom Komma	2^0
n-te Stelle links vom Komma	2^{n-1}
1. Stelle rechts vom Komma	2^{-1}
n-te Stelle rechts vom Komma	2^{-n}

Rechnen mit Dualzahlen

Regel	Verfahren	Beispiel
Addition 0 + 0 = 0 0 + 1 = 1 1 + 0 = 1 1 + 1 = 10 **Subtraktion** 0 – 0 = 0 1 – 0 = 1 1 – 1 = 0 10 – 1 = 1	Dualzahlen werden stellenweise untereinander geschrieben. Die Addition oder Subtraktion erfolgt stellenweise von rechts. Bei 1 + 1 tritt ein Übertrag von 1 in die nächsthöhere Stelle auf. Bei 0–1 wird von der nächsthöheren Stelle eine 1 entlehnt.	**Addition:** 1 1 0 0 1 0 + 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 **Subtraktion:** 1 1 1 0 1 – 1 0 1 1 1 1 0 0 1 0
Subtraktion durch Komplementaddition *Verfahren ohne Vorzeichenstelle* Subtrahend 1 0 0 1 0 1er-Komplement 0 1 1 0 1 + 1 2er-Komplement 0 1 1 1 0	Vom Subtrahenden wird durch Invertierung das 1er-Komplement gebildet. Daraus wird durch Addition von 1 das 2er-Komplement gebildet und zum Minuenden addiert. Erfolgt ein Übertrag in der höchsten Stelle, so wird dieser gestrichen. Erfolgt kein Übertrag in der höchsten Stelle, so ist das Ergebnis negativ. Den Zahlenwert erhält man dann durch Bildung des 2er-Komplements.	**Subtraktion:** 1 0 1 1 0 – 1 0 1 Subtrahend 0 0 1 0 1 1er-Komplement 1 1 0 1 0 2er-Komplement 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 (Minuend) + 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 ≙ 1 0 0 0 1
Multiplikation und Division 1 · 1 = 1 1 · 0 = 0 0 · 0 = 0 0 : 1 = 0 1 : 1 = 1 Division durch 0 ist unzulässig.	Die Multiplikation erfolgt wie bei Dezimalzahlen durch stellenverschobene Addition der Teilprodukte. Entsprechend erfolgt die Division.	1 0 1 · 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0

Umrechnungen in andere Zahlensysteme

Verfahren	Beispiel
Dualzahl in Dezimalzahl Man bildet von rechts nach links die Potenzwerte zur Basis 2 und addiert sie.	Eine Dualzahl lautet 1001010. a) Wie groß sind die Potenzwerte zur Basis 2? b) Wie lautet die Dezimalzahl für die Dualzahl?

Dualzahl	1	0	0	1	0	1	0
Stelle	6	5	4	3	2	1	0
a) Potenzwerte	$1 \cdot 2^6$	$0 \cdot 2^5$	$0 \cdot 2^4$	$1 \cdot 2^3$	$0 \cdot 2^2$	$1 \cdot 2^1$	$0 \cdot 2^0$
b) Dezimalzahlen	64 +	0 +	0 +	8 +	0 +	2 +	0 = **74**

Verfahren	Beispiel
Delimalzahl In Dualzahl Man teilt jeweils durch 2 und schreibt die Reste auf. Diese ergeben, von unten nach oben gelesen, die Dualzahl. Bei Division mit 8 bzw. 16 erhält man auf diese Art eine Oktalzahl bzw. eine Hexadezimalzahl.	Wandeln Sie die Dezimalzahl 78 in eine Dualzahl um 78 : 2 = 39 Rest 0 ⇒ Dualziffer 0 39 : 2 = 19 1 ⇒ 1 19 : 2 = 9 1 ⇒ 1 9 : 2 = 4 1 ⇒ 1 4 : 2 = 2 0 ⇒ 0 2 : 2 = 1 0 ⇒ 0 1 : 2 = 1 ⇒ 1 78 ≙ **1 0 0 1 1 1 0** Leserichtung ⟶
Sedezimalzahl in Dezimalzahl Umwandlung der Ziffern 0 bis F in 4-stellige Dualzahlen und diese dann in Dezimalzahlen.	Wandeln Sie die Sedezimalzahl (Hexadezimalzahl) 2A3 in eine Dezimalzahl um. 2 A 3 0010 1010 0011 512 + 128 + 32 + 2 + 1 = **675**

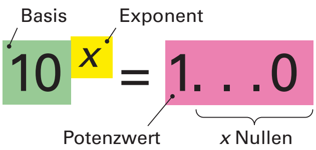
Vorsätze, Zehnerpotenzen, Logarithmen

Vorsätze Prefixes

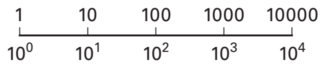
Für physikalische Größen (auch bei Übertragungsraten)						Für Speichergrößen mit Bit, Byte		
Vorsatz-zeichen	Vorsatz	Bedeutung (Faktor)	Vorsatz-zeichen	Vorsatz	Bedeutung (Faktor)	Vorsatz-zeichen	Vorsatz	Bedeutung (Faktor)
y	Yokto	10^{-24}	da	Deka	10	–	–	–
z	Zepto	10^{-21}	h	Hekto	10^2	–	–	–
a	Atto	10^{-18}	k	Kilo	10^3	K, Ki	Kilo, Kibi	2^{10} Bei großen Massen-
f	Femto	10^{-15}	M	Mega	10^6	M, Mi	Mega, Mebi	2^{20} speichern gelten oft die
p	Pico	10^{-12}	G	Giga	10^9	G, Gi	Giga, Gibi	2^{30} Bedeutungen der phy-
n	Nano	10^{-9}	T	Tera	10^{12}	T, Ti	Tera, Tebi	2^{40} sikalischen Größen
µ	Mikro	10^{-6}	P	Peta	10^{15}	P, Pi	Peta, Pebi	2^{50}
m	Milli	10^{-3}	E	Exa	10^{18}	E, Ei	Exa, Exbi	2^{60}
c	Zenti	10^{-2}	Z	Zetta	10^{21}	Z, Zi	Zetta, Zebi	2^{70}
d	Dezi	10^{-1}	Y	Yotta	10^{24}	Y, Yi	Yotta, Yobi	2^{80}

Vorsätze dürfen nicht kombiniert werden. Zu einer Einheit gehört maximal ein Vorsatz.
Im Binärbereich gibt es spezielle Binär-Vorsätze. So steht Ki für Kilo Binary, Mi für Mega Binary, Gi für Giga Binary, Ti für Tera Binary usw. **Beispiel:** 1 MiB = 2^{20} Byte, 1 GiB = 2^{30} Byte.

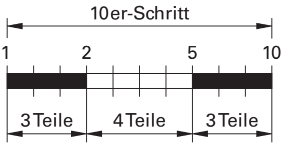
Zehnerpotenzen, Zehnerlogarithmen



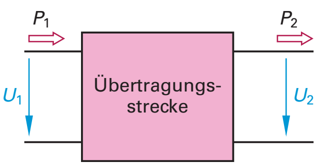
Zehnerpotenz



Teilung mit Zahlen und Zehnerpotenzen



Logarithmische Teilung



Übertragung von Signalen S_1, S_2

Dämpfungsfaktor: $D = S_1/S_2$

Leistungspegel L_P in dB (1 mW) = dBm

Spannungspegel L_U in dB (1 µV) = dBµ

Schalldruckpegel L_p in dB (20 µN/m²)

Zahl	0,001	0,1	1	10	10	1000	1000000
Zehner-potenz	10^{-3}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^6

Multiplikation

$$10^x \cdot 10^y = 10^{x+y} \quad (1)$$

Division

$$10^x : 10^y = 10^{x-y} \quad (2)$$

Potenzieren

$$(10^x)^y = 10^{x \cdot y} \quad (3)$$

Der Logarithmus log gibt an, mit welcher Zahl eine Basis zu potenzieren ist, um das Logarithmusargument zu erhalten.

$$a^b = c \qquad \log_a c = b \quad (4)$$

Der Zehnerlogarithmus lg hat die Basis 10. Der natürliche Logarithmus ln hat die Basis der e-Funktion (e = 2,718…). Der Zweierlogarithmus lb hat die Basis 2.

Für den Zehnerlogarithmus, aber auch bei Ersatz von lg durch ln bzw. lb für die anderen Logarithmen, gelten die Formeln 5 bis 7.

Multiplikation

$$\lg (a \cdot b) = \lg a + \lg b \quad (5)$$

Division

$$\lg (a/b) = \lg a - \lg b \quad (6)$$

Potenzieren

$$\lg a^n = n \cdot \lg a \quad (7)$$

$\log (1/x) = -\log (x)$

Umrechnen von Logarithmen

$$\lg x = \ln x / \ln 10 \quad (8)$$

$$\ln x = \lg x / \lg e \quad (9)$$

$$\mathrm{lb}\, x = \ln x / \ln 2 \quad (10)$$

$$\mathrm{lb}\, x = \lg x / \lg 2 \quad (11)$$

Leistungsbezogene, spannungsbezogene und druckbezogene Übertragungsmaße

Zur Kenntlichmachung des logarithmischen Maßes setzt man hinter den eigentlich einheitslosen Zahlenwert des Verhältnisses den Zusatz dB (Dezibel, sprich Dezi-Bell).

Dämpfungsmaße

$$A = 10 \lg (P_1/P_2)\ \mathrm{dB} \quad (12)$$

$$A = 20 \lg (U_1/U_2)\ \mathrm{dB} \quad (16)$$

Verstärkungsmaße

$$G = 10 \lg (P_2/P_1)\ \mathrm{dB} \quad (13)$$

$$G = 20 \lg (U_2/U_1)\ \mathrm{dB} \quad (17)$$

$$G = -A \quad (14)$$

$$A = -G \quad (15)$$

Schalldruck-übertragungsmaß

$$\ddot{U}_p = 20 \lg (p_1/p_2) \quad (18)$$

Bei Teilstrecken: $A_{ges} = A_1 + A_2 + \ldots;\ G_{ges} = G_1 + G_2 + \ldots;$
$D_{ges} = D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots$

Pegel nennt man das Übertragungsmaß von einem Bezugswert aus. Der Bezugswert sollte bei Pegelangaben genannt werden.

Leistungspegel in dBm

$$L_P = 10 \cdot \lg (P/1\ \mathrm{mW}) \quad (19)$$

Leistungspegel in dBµ

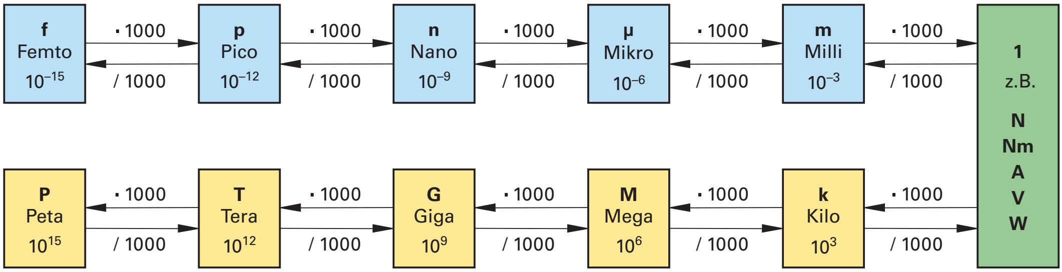
$$L_U = 20 \lg (U/1\ \mu\mathrm{V}) \quad (20)$$

Schalldruckpegel

$$L_p = 20 \lg (p/20\ \mu\mathrm{N/m^2}) \quad (21)$$

A	Dämpfungsmaß (*A* von attenuation)	L_U	Spannungspegel	Indizes			
G	Verstärkungsmaß (*G* von gain)	p	Druck (*p* von pressure)	P	Leistung	1	Eingang
L_P	Leistungspegel (*L* von level)	P	Leistung (*P* von power)	p	Schalldruck	2	Ausgang
L_p	Schalldruckpegel	U	Spannung	U	Spannung		

Umrechnungen von Vorsätzen



Vorsätze mit Tausender–Faktoren

Beziehungen Längen	µm	mm	cm	dm	m	km
µm	1	10^{-3} 0,001	10^{-4} 0,0001	10^{-5} 0,00001	10^{-6} 0,000001	10^{-9} 0,000000001
mm	10^{3} 1.000	1	10^{-1} 0,1	10^{-2} 0,01	10^{-3} 0,001	10^{-6} 0,000001
cm	10^{4} 10.000	10^{1} 10	1	10^{-1} 0,1	10^{-2} 0,01	10^{-5} 0,00001
dm	10^{5} 100.000	10^{2} 100	10^{1} 10	1	10^{-1} 0,1	10^{-4} 0,0001
m	10^{6} 1.000.000	10^{3} 1.000	10^{2} 100	10^{1} 10	1	10^{-3} 0,001
km	10^{9} 1.000.000.000	10^{6} 1.000.000	10^{5} 100.000	10^{4} 10.000	10^{3} 1.000	1
Beziehungen Flächen	mm^2	cm^2	dm^2	m^2	km^2	
mm^2	1	10^{-2} 0,01	10^{-4} 0,0001	10^{-6} 0,000001	10^{-12}	
cm^2	10^{2} 100	1	10^{-2} 0,01	10^{-4} 0,0001	10^{-10}	
dm^2	10^{4} 10.000	10^{2} 100	1	10^{-2} 0,01	10^{-8} 0,00000001	
m^2	10^{6} 1.000.000	10^{4} 10.000	10^{2} 100	1	10^{-6} 0,000001	
km^2	10^{12}	10^{-10}	10^{8} 100.000.000	10^{6} 1.000.000	1	
Beziehungen Volumen	mm^3	cm^3 = ml	dm^3 = l	m^3		
mm^3	1	10^{-3} 0,001	10^{-6} 0,000001	10^{-9}		
cm^3 = ml	10^{3} 1.000	1	10^{-3} 0,001	10^{-6} 0,000001		
dm^3 = l	10^{6} 1.000.000	10^{3} 1.000	1	10^{-3} 0,001		
m^3	10^{9} 1.000.000.000	10^{6} 1.000.000	10^{3} 1.000	1		
Beziehungen Zeit	µs	ms	s	min	h	t
µs	1	10^{-3} 0,001	10^{-6} 0,000001	$10^{-6}/60$	$10^{-6}/3.600$	$10^{-6}/24/3.600$
ms	10^{3} 1.000	1	10^{-3} 0,001	$10^{-3}/60$	$10^{-3}/3.600$	$10^{-3}/24/3.600$
s	10^{6} 1.000.000	10^{3} 1.000	1	1/60	1 / 3.600	1 / 86.400
min	$60 \cdot 10^{6}$ 60.000.000	$60 \cdot 10^{3}$ 60.000	60	1	1 / 60	1 / 1.440
h	$3.600 \cdot 10^{6}$	$3600 \cdot 10^{3}$ 3.600.000	3.600	60	1	1 /24
t	$24 \cdot 3.600 \cdot 10^{6}$	$24 \cdot 3.600 \cdot 10^{3}$	86.400	1.440	24	1

Verwendete Einheiten ohne Vorsatz: A Ampere, h Stunde, l Liter, m Meter, min Minute, N Newton, s Sekunde, t Tag, V Volt, W Watt

Rechnen mit Größen

Begriffe | Erklärung | Bemerkungen

Basisgrößen

Größe	Formelzeichen	Einheit	Einheitenzeichen
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Stromstärke	I	Ampere	A
Temperatur	T	Kelvin	K
Lichtstärke	I_v	Candela	cd
Stoffmenge	n	Mol	mol

Erklärung:

Spezieller Wert einer Größe (Größenwert oder in der Messtechnik Messwert) ist das Produkt aus Zahlenwert und Einheit.

Formelzeichen verwendet man zur Abkürzung von Größen.
Einheitenzeichen verwendet man zur Abkürzung der Einheiten.
Basisgrößen sind Ausgangsgrößen, aus denen andere Größen abgeleitet werden.

Bemerkungen:

Der Malpunkt zwischen Zahlenwert und Einheit entfällt.

Kurzform einer Länge von 8 m ist l = 8 m.
Formelzeichen sind Buchstaben (auch griechische), die *kursiv* gedruckt werden.
Einheitenzeichen sind Buchstaben (auch griechische), die senkrecht gedruckt werden.

A bedeutet Fläche, A bedeutet Ampere.

Abgeleitete Größen

Größe	Formelzeichen	Formel	berechnete Einheit
Fläche	A	$A = l \cdot b$	$\mathrm{m \cdot m = m^2}$
Ladung	Q	$Q = I \cdot t$	$\mathrm{A \cdot s = As}$
Beschleunigung	a	$a = s/t^2$	$\mathrm{m/s^2}$
Kraft	F	$F = m \cdot a$	$\mathrm{kgm/s^2}$
Arbeit	W	$W = F \cdot s$	$\mathrm{kgm^2/s^2}$
Leistung	P	$P = W/t$	$\mathrm{kgm^2/(s^2 \cdot s)}$ $\mathrm{= kgm^2/s^3}$
Druck	p	$p = F/A$	$\mathrm{kgm/(s^2 \cdot m^2)}$ $\mathrm{= kg/(s^2 \cdot m)}$
el. Spannung	U	$U = P/I$	$\mathrm{(kgm^2/s^3)/A}$ $\mathrm{= kgm^2/(As^3) = V}$
el. Feldstärke	E	$E = F/Q$	$\mathrm{(kgm/s^2)/(As)}$ $\mathrm{= kgm/(A \cdot s^3)}$ $\mathrm{= V/m}$

Erklärung:

Man verwendet oft Größen, die aus den Basiseinheiten mithilfe einer Formel abgeleitet sind, z. B. für eine Fläche. Dabei geht man von der Formel für die gesuchte Größe aus, z. B.
$A = l \cdot b$,
Einheit $\mathrm{m \cdot m = m^2}$.

Auch aus den aus Basiseinheiten abgeleiteten Größen können weitere Größen abgeleitet werden, z. B. die elektrische Spannung aus P und I zu $U = P/I$ mit den Einheiten
$[U] = \mathrm{kgm^2/(A \cdot s^3)}$
$= \mathrm{kgm^2/As^3 = V}$.

Bemerkungen:

Die aus Basiseinheiten abgeleiteten Größen sind oft wenig anschaulich. Deshalb verwendet man meist Größen, die aus abgeleiteten Größen anderer Größen bestehen.

So wird der elektrische Widerstand R hergeleitet von Spannung U und Stromstärke I.
$R = U/I$

Die Arbeit W wird hergeleitet von Kraft F und Kraftweg s oder von Spannung U und Stromstärke I.
$W = F \cdot s$ oder
$W = U \cdot I$

Entsprechend berechnet man die jeweilige Einheit (nächster Abschnitt).

Abgeleitete Einheiten

Größe	berechnete Einheit	besonderer Name	Einheitenzeichen
Ladung	As	Coulomb	C
Kraft	$\mathrm{kgm/s^2}$	Newton	N
Arbeit	$\mathrm{kgm^2/s^2}$	Newtonmeter	Nm
Leistung	$\mathrm{kgm^2/s^3}$	Watt	W
Druck	$\mathrm{kg/(s^2 \cdot m)}$	Pascal	Pa
Kapazität	As/V	Farad	F
Induktivität	Vs/A	Henry	H
el. Feldstärke	$\mathrm{kgm/(As^3)}$ V/m	–	N/C V/m

Erklärung:

Schreibweise
$[Q]$ sprich: Einheit von Q

Einheit bestimmen
Man erhält bei Bedarf die Einheit aus der Formel, z. B. für
$Q = I \cdot t$
$[Q] = [I] \cdot [t] = \mathrm{A \cdot s = As}$
$= \mathrm{C}$

Besonderer Name
Nur häufig vorkommende, abgeleitete Einheiten haben einen besonderen Namen, der nach Erfindern benannt ist.
$[P] = [U] \cdot [I] = \mathrm{V \cdot A}$
$= \mathrm{W}$

Bemerkungen:

$[W] = [F] \cdot [s] = \mathrm{Nm}$ oder
$[W] = [U] \cdot [I] = \mathrm{VA}$

Sonderfall bei Verhältnissen
Bei Verhältnissen kann eintreten, dass gleichartige Größen ins Verhältnis gesetzt sind, z. B. beim Leistungswirkungsgrad.

$[\eta] = [P_{ab}]/[P_{zu}] = \mathrm{W/W} = 1$

Wenn eine Größe keine Einheit hat, dann ist [*Größe*] = 1. In diesem Fall entfällt die Ermittlung der Einheit.

Rechnen mit Vorsätzen

Multiplikation (Malnehmen)	
1 mal m = m	1 A mal 1 ms = 1 mAs
1 mal k = k	1 kA mal 1 s = 1 kAs
k mal m = 1	1 kA mal 1 ms = 1 As
M mal m = k	1 MΩ mal 1 mA = 1 kV
m mal m = µ	1 mA mal 1 ms = 1 µAs
µ mal k = m	1 µA mal 1 kV = 1 mW
k mal n = µ	1 kΩ mal 1 nA = 1 µV
Division (Teilen)	
m durch 1 = m	1 mAs/1 A = 1 ms
k durch 1 = k	1 kAs/1 s = 1 kA
1 durch m = k	1 As/1 ms = 1 kA
1 durch k = m	1 As/1 kA = 1 ms
1 durch M = µ	1 V/1 MΩ = 1 µA

Erklärung:

Allgemein kann man bei Berechnungen die **Vorsätze** der Einheiten durch Zehnerpotenzen (vorhergehende Seite) ersetzen.

$P = U \cdot I = 20\ \mathrm{kV} \cdot 100\ \mathrm{mA}$
$= 20 \cdot 10^3\ \mathrm{V} \cdot 100 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}$
$= 20 \cdot 100\ \mathrm{V \cdot A} = 2000\ \mathrm{VA}$

Oft wird die Rechenarbeit einfacher, wenn man sich nebenstehende Regeln für die jeweils um 1000 abweichende Reihe (µ, m, 1, k, M, G) einprägt. Hier k mal m = 1, also 20 kV mal 100 mA = 2000 VA.

Bemerkungen:

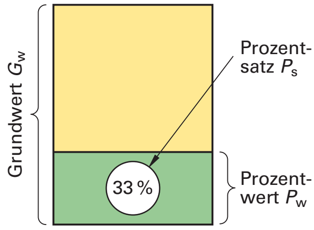
Bei Vorsätzen, die sich nicht um den Faktor 1000 unterscheiden, ist der Ersatz des Einheitszeichens durch Zehnerpotenzen zweckmäßig, z. B. bei der Umrechnung von km in cm.
$0{,}06\ \mathrm{km} = 0{,}06 \cdot 10^3\ \mathrm{m}$
$= 60\ \mathrm{m} = 6000\ \mathrm{cm}$

Kombination der Vorsätze ist nicht zulässig, also keinesfalls 6 kcm schreiben.

Bei Größen mit Exponenten, z. B. Flächen (Quadrat-) oder Rauminhalten (Kubik-) ist der Vorsatz entsprechend zu potenzieren.
$1\ \mathrm{km^2} = 10^{3 \cdot 2}\ \mathrm{m^2} = 10^6\ \mathrm{m^2}$

Prozentrechnung, Dreisatzrechnung, Zuverlässigkeit, Verfügbarkeit

Prozentrechnung



Begriffe der Prozentrechnung

G_w Grundwert
K_0 Anfangskapital
p Jahreszinssatz
P_s Prozentsatz in %, Wachstumsrate, Abnahmerate
P_w Prozentwert
t Zinstage
Z Zins
Z_z Zinseszins

1 Zinsjahr (1 a) = 360 Zinstage (360 d)
1 Zinsmonat = 30 Zinstage (30 d)

a von lat. anno = Jahr,
d von engl. day = Tag

Prozentwert

$$P_w = \frac{G_w \cdot P_s}{100\,\%} \quad (1)$$

Prozentsatz

$$P_s = \frac{P_w}{G_w} \cdot 100\,\% \quad (2)$$

Promille

$$1\,‰ = \frac{1}{1000}$$

Zins

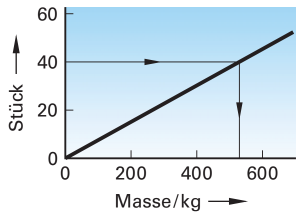
$$Z = \frac{K_0 \cdot p \cdot t}{100\,\% \cdot 360} \quad (3)$$

Zinseszins nach *n* Jahren

$$Z_z = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100\,\%}\right)^n \quad (4)$$

Zahl	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	1,5
in Prozent	1%	2%	4%	5%	10%	12,5%	20%	25%	$33\frac{1}{3}$%	$66\frac{2}{3}$%	75%	100%	125%	150%

Dreisatzrechnung



Dreisatzrechnung für ein proportionales Verhältnis

Proportionales Verhältnis (Einheit durch Division)

1. Aussage (Beispiel): *n* Elemente wiegen *a* kg
2. Berechnung für 1 Objekt: 1 Element wiegt *a*/*n* kg
3. Berechnung für *z* Objekte: *z* Elemente wiegen *z* · *a*/*n* kg

Invers proportionales Verhältnis (Einheit durch Multiplikation)

1. Aussage (Beispiel): *n* Arbeiter brauchen *a* Stunden
2. Berechnung für 1 Objekt: 1 Arbeiter braucht *n* · *a* Stunden
3. Berechnung für *z* Objekte: *z* Arbeiter brauchen *n* · *a*/*z* Stunden

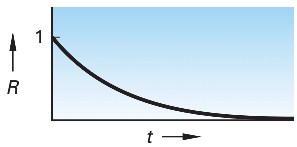
A_m Anfangsmenge, A_w Ausgangswert, E_m Endmenge, E_w Endwert

Endwert

$$E_w = \frac{A_w}{A_m} \cdot E_m \quad (5)$$

$$E_w = \frac{A_m \cdot A_w}{E_m} \quad (6)$$

Zuverlässigkeit, Verfügbarkeit



Zuverlässigkeitsfunktion

F Ausfallwahrscheinlichkeit
n_a Anzahl ausgefallene Einheiten
n Anzahl Einheiten
R Zuverlässigkeit
t Betriebszeit
t_x Zeitpunkt
λ Ausfallrate (Lambda)
MTBF Mean Time between Failure

Zuverlässigkeit bei t_0

$$R\,(t_x) = 1 - \frac{n_a}{n} \quad (7)$$

Zuverlässigkeit allg.

$$R\,(t) = e^{-\lambda t} \quad (8)$$

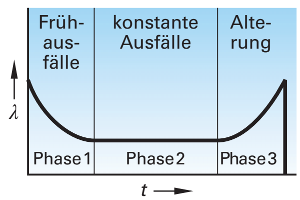
$\lambda = -\ln\,(R(t))/t$

Ausfallwahrscheinlichkeit

$$F\,(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (9)$$

ln (< 1) ist negativ

$\lambda = -\ln\,(1 - F(t))/t$



Ausfallverhalten

A Verfügbarkeit
a Ausfallsatz
L Ausfallhäufigkeit
n_g Anzahl gute Einheiten
n Anzahl Einheiten
n_a Anzahl ausgefallene Einheiten
t Betriebszeit
$t_{1,2}$ Zeitpunkte
λ Ausfallrate (Lambda)
MTBF Mean Time between Failure
MTTR Mean Time to Repair (Recover)

Ausfallhäufigkeit

$$L = \frac{n_g\,(t_1) - n_g\,(t_2)}{n} \quad (10)$$

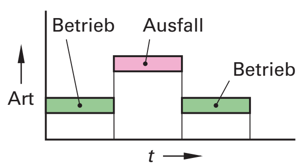
Ausfallrate für Phase 2

$$\lambda = \frac{1}{MTBF} \quad (11)$$

Ausfallsatz

$$a = \frac{n_a}{n} \quad (12)$$

$n_a = a \cdot n;\; n = \frac{n_a}{a}$



Verfügbarkeit, Ausfall, Betrieb

Verfügbarkeit ist ein Maß, dass ein Bauelement (oder System) seine ausgewiesenen Funktionen zu einem vereinbarten Zeitpunkt oder innerhalb eines vereinbarten Zeitrahmens erfüllt. Ausfallzeiten wegen Wartung werden nicht berücksichtigt.

Verfügbarkeit

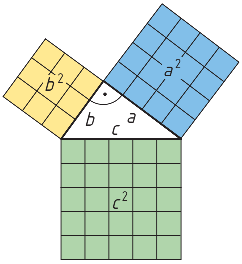
$$\text{Verfügbarkeit} = \frac{\text{Betriebszeit} - \text{Ausfallzeit}}{\text{Betriebszeit}} \quad (13)$$

Bei konstanter Ausfallrate und Instandsetzungsrate:

$$A = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR} \quad (14)$$

Rechtwinkliges Dreieck, Winkelfunktionen, Steigung

Lehrsatz des Pythagoras



Im **rechtwinkligen Dreieck** ist das Hypotenusenquadrat flächengleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.

Hypotenusenquadrat

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$$

Kathete *a*

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (2)$$

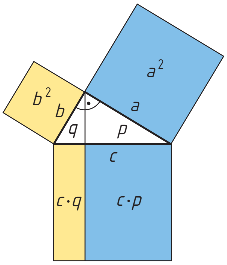
Kathete *b*

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (3)$$

Hypotenuse

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4)$$

Lehrsatz des Euklid (Kathetensatz)



Das Quadrat über einer Kathete ist flächengleich einem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

Kathetenquadrate

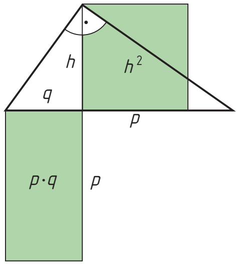
$$b^2 = c \cdot q \quad (5)$$

$c = b^2/q$

$$a^2 = c \cdot p \quad (7)$$

$p = a^2/c$

Höhensatz



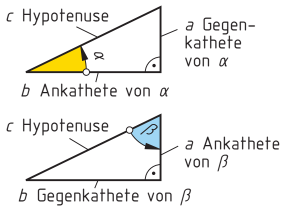
Das Quadrat über der Höhe h ist flächengleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten p und q.

Höhenquadrat

$$h^2 = p \cdot q \quad (6)$$

$p = \frac{h^2}{q}$ $\quad q = \frac{h^2}{p}$

Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck



$$\textbf{Sinus} = \frac{\textbf{Gegenkathete}}{\textbf{Hypotenuse}} \quad (8) \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c} \quad (9) \qquad \sin\beta = \frac{b}{c} \quad (10)$$

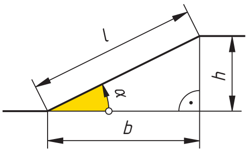
$$\textbf{Kosinus} = \frac{\textbf{Ankathete}}{\textbf{Hypotenuse}} \quad (11) \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \quad (12) \qquad \cos\beta = \frac{a}{c} \quad (13)$$

$$\textbf{Tangens} = \frac{\textbf{Gegenkathete}}{\textbf{Ankathete}} \quad (14) \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b} \quad (15) \qquad \tan\beta = \frac{b}{a} \quad (16)$$

$$\textbf{Kotangens} = \frac{\textbf{Ankathete}}{\textbf{Gegenkathete}} \quad (17) \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} \quad (18) \qquad \cot\beta = \frac{a}{b} \quad (19)$$

Art	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2} = 0{,}5000$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} = 0{,}7071$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} = 0{,}8660$	1	0	–1	0
cos	1	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} = 0{,}8660$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} = 0{,}7071$	$\frac{1}{2} = 0{,}5000$	0	–1	0	1
tan	0	$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} = 0{,}5774$	1	$\sqrt{3} = 1{,}7321$	∞	0	∞	0
cot	∞	$\sqrt{3} = 1{,}7321$	1	$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} = 0{,}5774$	0	∞	0	–∞

Steigung geneigter Strecken



Steigung

$$x = \frac{h \cdot 100\,\%}{b} \quad (20)$$

$h = x \cdot \frac{b}{100\,\%}$

Steigungswinkel

$$\tan\alpha = \frac{h}{b} \quad (21)$$

$h = b \cdot \tan\alpha$

Länge der geneigten Strecke

$$l = \sqrt{h^2 + b^2} \quad (22) \qquad l = \frac{h}{\sin\alpha} \quad (23)$$

$h = \sqrt{l^2 - b^2}$ $\qquad h = l \cdot \sin\alpha$

a Kathete
b Kathete, Basis
c Hypotenuse

h Höhe, Höhenunterschied
p, q Hypotenusenabschnitte

l Länge der geneigten Strecke
α Steigungswinkel
x Steigung in %

Die Bedeutung der Formelzeichen ist aus den Bildern und Formelüberschriften erkennbar.

Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen

Reduktionsformeln

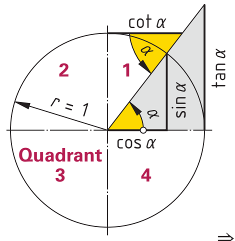
Funktion	$\beta = 90° \pm \alpha$	$\beta = 180° \pm \alpha$	$\beta = 270° \pm \alpha$	$\beta = 360° - \alpha$
$\sin \beta$	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$+\cos \alpha$
$\tan \beta$	$\mp \cot \alpha$	$\mp \tan \alpha$	$\pm \cot \alpha$	$-\tan \alpha$
$\cot \beta$	$\mp \tan \alpha$	$\pm \cot \alpha$	$\pm \tan \alpha$	$-\cot \alpha$

Das Bogenmaß des Winkels α ist das Verhältnis der Kreisbogenlänge b zum Radius r.

$\alpha = \frac{b}{r}$

$0° \rightarrow 0$
$90° \rightarrow \pi/2$
$180° \rightarrow \pi$

Winkelbeziehungen im rechtwinkligen Dreieck



Nach dem Lehrsatz des Pythagoras:

$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$ **1**

Weil $\tan \alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

und $\cot \alpha = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1}$ **2**

$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$

Die Wurzel ist positiv oder negativ, je nachdem, in welchem Quadrant der Winkel liegt.

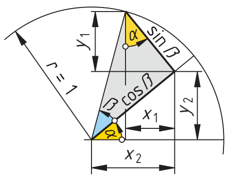
Quadrant	1	2	3	4
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+

$\boxed{\dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha}$ **3**

$\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tan \alpha$
$\cos \alpha = \sin \alpha / \tan \alpha$

$\boxed{\dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha}$ **4**

$\boxed{\cot \alpha = \dfrac{1}{\tan \alpha}}$ **5**



$x_1 = \sin \alpha \cdot \sin \beta$
$x_2 = \cos \alpha \cdot \cos \beta$
$y_1 = \cos \alpha \cdot \sin \beta$
$y_2 = \sin \alpha \cdot \cos \beta$
$\sin(\alpha + \beta) = y_1 + y_2$
$\cos(\alpha + \beta) = x_2 - x_1$

$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$

$\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$

$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$

$\sin \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1 - \cos \alpha)}$

$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}$

$\cos \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1 + \cos \alpha)}$

$\tan \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \dfrac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha \mp \beta}{2}$

$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \sin \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\tan \alpha \pm \tan \beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

$\cot \alpha \pm \cot \beta = \pm \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \dfrac{2}{\cot \alpha - \tan \alpha}$

$\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} = \dfrac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2}$

$\sin^2 \alpha = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

$\tan 3\alpha = \dfrac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$

$\cot 3\alpha = \dfrac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$

$\cos^2 \alpha = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$

Winkelbeziehungen im allgemeinen Dreieck

Sinussatz $\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma} = 2 r_a$

Kosinussatz
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

Tangenssatz $\dfrac{a + b}{a - b} = \dfrac{\tan[1/2(\alpha + \beta)]}{\tan[1/2(\alpha - \beta)]}$

Fläche $A = \dfrac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = 2 r_a^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$

Höhe auf a $h_a = b \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \beta$

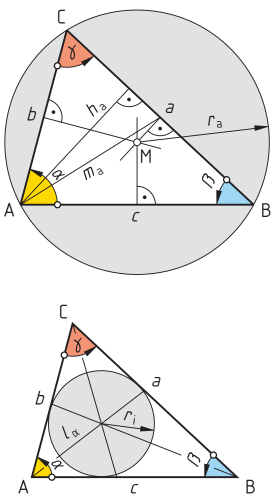
Seitenhalbierende auf a $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha}$

Winkelhalbierende von α $l_\alpha = \dfrac{2bc \cdot \cos(\alpha/2)}{b + c}$

Radius des Umkreises $r_a = \dfrac{a}{2 \cdot \sin \alpha} = \dfrac{b}{2 \cdot \text{sind}\, \beta} = \dfrac{c}{2 \cdot \sin \gamma}$

Radius Inkreis $r_i = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)/s}$

Winkelgleichung
$s = (a + b + c)/2$
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



Umkreis (oben) und Inkreis (unten) des Dreiecks

Sinussatz:
Im Dreieck verhalten sich zwei Seiten zueinander wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel.

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

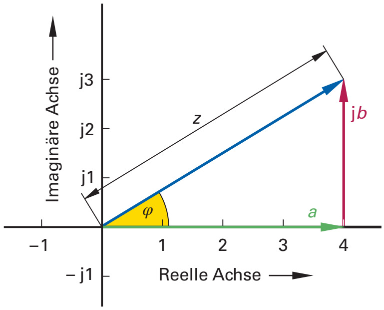
$a = b \cdot \dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

$b = a \cdot \dfrac{\sin \beta}{\sin \alpha}$

Kosinussatz:
Im Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der anderen beiden Seiten minus dem doppelten Produkt aus diesen Seiten und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels.

Rechnen mit komplexen Zahlen

Mathematische Grundlagen



Komplexe Zahlenebene

Eine **komplexe Zahl $\underline{z}$** ist eine Zahl in der komplexen Zahlenebene. Eine komplexe Zahl besteht aus einem **Realteil *a*** und dem **Imaginärteil *b***. Sie kann auch über einen Betrag mit Winkelangabe dargestellt werden.

Die Einheit der imaginären Achse ist j.

Komplexe Zahl

arithmetische Form: $\underline{z} = a + \mathrm{j}b$ (1)

trigonometrische Form: $\underline{z} = z\,(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$ (2)

Exponentialform: $\underline{z} = z \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ (3)

Realteil

$a = z \cdot \cos\varphi$ (4)

Imaginärteil

$b = z \cdot \sin\varphi$ (5)

$z = \sqrt{a^2 + b^2}$ (6)

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi$ (7)

$\varphi = \arctan\dfrac{b}{a}$ (8)

$\mathrm{j}^2 = -1$ (9)

$\mathrm{j}^{-1} = 1/\mathrm{j} = -\mathrm{j}$ (10)

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = 2\cos\varphi$ (11)

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = \mathrm{j}\,2\sin\varphi$ (12)

$\dfrac{b}{a} = \tan\varphi$

Rechnen mit komplexen Zahlen, konjugiert komplexen Zahlen

Addition

$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{j}\,(b_1 + b_2)$ (13)

Subtraktion

$\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (a_1 - a_2) + \mathrm{j}\,(b_1 - b_2)$ (14)

Multiplikation

$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = z_1 \cdot z_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1 + \varphi_2)}$ (15)

Division

$\dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \dfrac{z_1}{z_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1 - \varphi_2)}$ (16)

$\dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \dfrac{(a_1 + \mathrm{j}\,b_1)\,(a_2 - \mathrm{j}\,b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$ (17)

Potenz

$\underline{z}^n = z^n \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}$ (18)

Wurzel

$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{z} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi/n)}$ (19)

Eine konjugiert komplexe Zahl $\underline{z}^*$ ist die an der reellen Achse gespiegelte Zahl $\underline{z}$.

$\underline{z}^* = a - \mathrm{j}b$ (20)

$\underline{z}^* = z \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$ (21)

Addition

$\underline{z} + \underline{z}^* = 2\,a$ (22)

Subtraktion

$\underline{z} - \underline{z}^* = \mathrm{j}\,2\,b$ (23)

Multiplikation

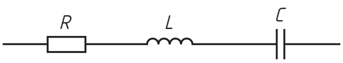
$\underline{z} \cdot \underline{z}^* = z^2 = a^2 + b^2$ (24)

Division

$\dfrac{\underline{z}}{\underline{z}^*} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\varphi}$ (25)

Komplexe Berechnung des Scheinwiderstandes bei RLC-Schaltungen

Reihenschaltung



$\underline{R} = R$ (26)

$\underline{Z} = \underline{R} + \underline{X}_\mathrm{L} + \underline{X}_\mathrm{C}$ (27)

$\underline{X}_\mathrm{L} = \mathrm{j}\,\omega\,L$ (28)

$\underline{X}_\mathrm{C} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega\,C}$ (29)

$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$ (31)

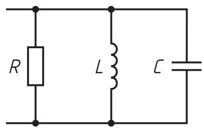
$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ (32)

$\varphi = \arctan\dfrac{\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{R}$ (35)

$\underline{Z} = Z \cdot (\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$ (36)

Bei Reihenschaltungen werden Widerstände addiert.

Parallelschaltung



$\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{R}} + \dfrac{1}{\underline{X}_\mathrm{L}} + \dfrac{1}{\underline{X}_\mathrm{C}}$ (30)

Formeln 26, 28, 29 gelten auch für Parallelschaltung.

$\underline{Y} = \dfrac{1}{R} + \mathrm{j}\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$ (33)

$Y = \sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2}$ (34)

$\varphi = \arctan\dfrac{\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)}{G}$ (37)

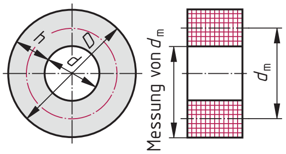
$\underline{Y} = Y \cdot (\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$ (38)

Bei Parallelschaltungen werden Leitstände addiert.

L	Induktivität	Z	Scheinwiderstand	φ	Argument von $\underline{z}$
C	Kapazität	Y	Scheinleitwert	j	imaginäre Einheit
G	Wirkleitwert	X_L, X_C	Blindwiderstände	e	Eulersche Zahl (2,71828…)
R	Wirkwiderstand	ω	Kreisfrequenz ($\omega = 2\pi\,f$)	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$	Einheitsvektor von $\underline{z}$
				$\_$	Kennzeichnung für komplex

Längen

Drahtlängen von Spulen, Kreisringausschnitt



Rundspulen

Einheiten

$[D] = [d] = [h] = [a] = [b] = \text{m} \Rightarrow [l_m] = [l] = \text{m}$

$[D] = [d] = [h] = [a] = [b] = \text{cm} \Rightarrow [l_m] = [l] = \text{cm}$

$l = l_m \cdot N$

$l_m = \pi \cdot d_m$

$D_m = D - h$

Messung von d_m

$$d_m = d + h \quad (2)$$

$h = d_m - d$

$d = d_m - h$

Rundspule

$$l = \pi \cdot d_m \cdot N \quad (1)$$

$d_m = l/(\pi \cdot N)$

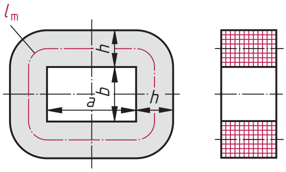
$N = l/(\pi \cdot d_m)$

mittlerer Durchmesser

$$d_m = \frac{D + d}{2} \quad (3)$$

$D = 2 \cdot d_m - d$

$d = 2\, d_m - D$



Rechteckspulen

$l = l_m \cdot N$

$l_m = l/N$

$l_m = 2a + 2b + \pi \cdot h$

Rechteckspule

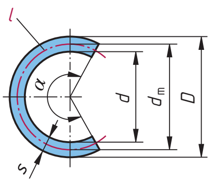
$$l = (2a + 2b + \pi \cdot h) \cdot N \quad (4)$$

$a = (l/N - 2b - \pi \cdot h)/2$

$b = (l/N - 2a - \pi \cdot h)/2$

$h = (l/N - 2a - 2b)/\pi$

$N = l/(2a + 2b + \pi \cdot h)$



Kreisringausschnitt

$[\alpha] = {}^\circ$

Kreisring

$$l = \pi \cdot d_m \quad (5)$$

$d_m = l/\pi$

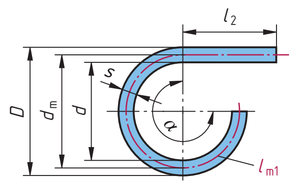
Kreisringausschnitt

$$l_{m1} = \frac{\pi \cdot d_m \cdot \alpha}{360^\circ} \quad (6)$$

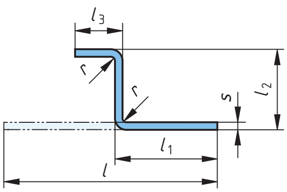
$d_m = l_{m1} \cdot \dfrac{360^\circ}{\pi \cdot \alpha}$

$\alpha = 360^\circ \cdot l_{m1}/(\pi \cdot d_m)$

Zusammengesetzte Längen



Werkstück mit Rundung



Werkstück mit Biegewinkel 90°

Man zerlegt das Werkstück in Teillängen und addiert diese. Bei Rundung ist die Länge der neutralen Faser zu berechnen, z. B. der Kreisringausschnitt.

Ausgleichswerte v für Biegewinkel $\alpha = 90°$

Biegeradius r in mm	Blechdicke s in mm								
	0,4	0,6	0,8	1	1,5	2	2,5	3	3,5
1	1,0	1,3	1,7	1,9	–	–	–	–	–
1,6	1,3	1,6	1,8	2,1	2,9	–	–	–	–
2,5	1,6	2,0	2,2	2,4	3,2	4,0	4,8	–	–
4	–	2,5	2,8	3,0	3,7	4,5	5,2	6,0	6,9

Gestrecke Länge mit Rundung

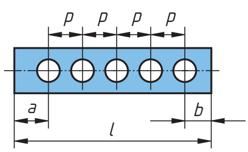
$$l = l_{m1} + l_2 \ldots \quad (7)$$

Bei einem Werkstück mit Biegewinkel von 90° addiert man die Schenkel und zieht von der Summe einen Ausgleichswert ab.

Gestrecke Länge

$$l = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots - z \cdot v \quad (8)$$

Teilung von Längen



Randabstand ≠ Teilung

Teilung bei Randabstand ≠ Teilung

$$p = \frac{l - (a + b)}{z - 1} \quad (9)$$

$z = (l - (a + b))/p + 1$

$l = p(z - 1) + a + b$

Teilung bei Randabstand = Teilung

$$p = \frac{l}{z + 1} \quad (10)$$

$z = l/p - 1$

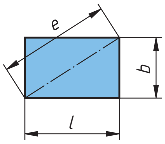
$l = p \cdot (z + 1)$

a, b, c	Strecken	l	Länge	s	Dicke
D	Außendurchmesser	l_m	mittlere Länge (bei Rundung)	v	Ausgleichswert
d	Innendurchmesser	N	Windungszahl	z	Anzahl der Biegestellen oder Bohrungen
d_m	mittlerer Durchmesser	p	Teilung	α	Winkel
h	Wicklungshöhe	r	Biegeradius	Indizes: 1, 2, 3 für Teile	

Die Bedeutung weiterer Formelzeichen ist aus den Bildern erkennbar.

Flächen 1

Rechteck und verwandte Flächen



Rechteck

$[l] = [b] = \mathrm{m} \Rightarrow [A] = \mathrm{m}^2$

$[l] = [b] = \mathrm{mm} \Rightarrow [A] = \mathrm{mm}^2$

$[e] = \mathrm{m}$ oder $[e] = \mathrm{mm}$

Eckenmaß Rechteck

$$e = \sqrt{l^2 + b^2} \quad (1)$$

$l = \sqrt{e^2 - b^2}$

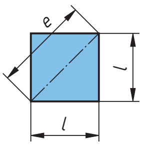
$b = \sqrt{e^2 - l^2}$

Fläche Rechteck

$$A = l \cdot b \quad (2)$$

$l = A/b$

$b = A/l$



Quadrat

$[l] = \mathrm{m} \Rightarrow [A] = \mathrm{m}^2$

$[l] = \mathrm{mm} \Rightarrow [A] = \mathrm{mm}^2$

Eckenmaß Quadrat

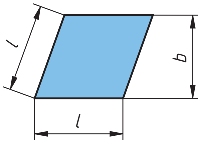
$$e = \sqrt{2} \cdot l \quad (3)$$

$l = e/\sqrt{2}$

Fläche Quadrat

$$A = l^2 \quad (4)$$

$l = \sqrt{A}$



Raute (Rhombus)

$[l] = [b] = \mathrm{m} \Rightarrow [A] = \mathrm{m}^2$

$[l] = [b] = \mathrm{mm} \Rightarrow [A] = \mathrm{mm}^2$

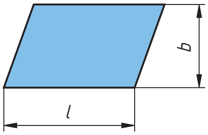
$1\ \mathrm{m}^2 = 100\ \mathrm{dm}^2$
$1\ \mathrm{dm}^2 = 100\ \mathrm{cm}^2$
$1\ \mathrm{cm}^2 = 100\ \mathrm{m}^2$

Fläche Raute

$$A = l \cdot b \quad (5)$$

$l = A/b$

$b = A/l$



Parallelogramm (Rhomboid)

$[l] = [b] = \mathrm{m} \Rightarrow [A] = \mathrm{m}^2$

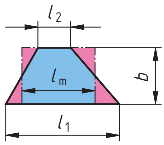
$[l] = [b] = \mathrm{mm} \Rightarrow [A] = \mathrm{mm}^2$

Fläche Parallelogramm

$$A = l \cdot b \quad (6)$$

$b = A/l$

$l = A/b$



Trapez

$[l_m] = [b] = \mathrm{m} \Rightarrow [A] = \mathrm{m}^2$

$[l_m] = [b] = \mathrm{mm} \Rightarrow [A] = \mathrm{mm}^2$

Mittlere Länge Trapez

$$l_m = \frac{l_1 + l_2}{2} \quad (7)$$

$l_1 = 2 \cdot l_m - l_2$

$l_2 = 2 \cdot l_m - l_1$

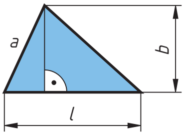
Fläche Trapez

$$A = l_m \cdot b \quad (8)$$

$l_m = A/b$

$b = A/l_m$

Dreieckberechnungen



Dreieck

$[l] = [b] = \mathrm{m} \Rightarrow [A] = \mathrm{m}^2$

$[l] = [b] = \mathrm{mm} \Rightarrow [A] = \mathrm{mm}^2$

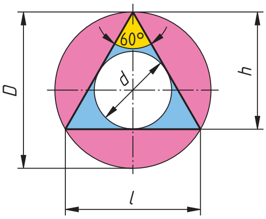
Bei rechtwinkligem Dreieck:
$A = a \cdot b/2$

anstelle von *b* wird auch *h* verwendet

Fläche Dreieck

$$A = \frac{l \cdot b}{2} \quad (9)$$

$l = 2 \cdot A/b \qquad b = 2A/l$



Gleichseitiges Dreieck

$[d] = [D] = [h] = [l] = \mathrm{m}$
$\Rightarrow [A] = \mathrm{m}^2$

$[d] = [D] = [h] = [l] = \mathrm{mm}$
$\Rightarrow [A] = \mathrm{mm}^2$

Umkreisdurchmesser

$$D = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot l = 2 \cdot d \quad (10)$$

$l = \sqrt{3} \cdot D/2 = \sqrt{3} \cdot d$

Fläche

$$A = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot l^2 \quad (11)$$

$l = 2\sqrt{A/\sqrt{3}}$

Inkreisdurchmesser

$$d = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot l = \frac{D}{2} \quad (12)$$

$l = \sqrt{3} \cdot d = \sqrt{3} \cdot D/2$

Dreieckshöhe

$$h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot l \quad (13)$$

$l = 2h/\sqrt{3}$

A	Fläche	D	Umkreisdurchmesser	l	Seitenlänge
b	Breite	e	Eckenmaß	l_1	große Länge
d	Inkreisdurchmesser	h	Höhe	l_2	kleine Länge
				l_m	mittlere Länge

Die Bedeutung sonstiger Größen ist aus den Bildern und Formelüberschriften erkennbar.