

2 Strom, Spannung, Leistung bei Mehrphasensystemen

2.1 Grundbegriffe und Grundschaltungen

Wird ein aus m Zweipolen bestehendes System (z. B. der Stator einer Drehstrommaschine mit $m = 3$ Wicklungssträngen) mit einem mehrphasigen Spannungssystem (z. B. einem Drehspannungssystem) gespeist, dann kann man die **Strangspannungen** und **-ströme** der m Zweipole zu Vektoren (Spaltenmatrizen) zusammenfassen:

$$(u) = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T, \quad (2.1)$$

$$(i) = (i_1, i_2, \dots, i_m)^T. \quad (2.2)$$

Aus der Schaltung können im Einzelfall Bedingungen für die Strangspannungen oder -ströme resultieren. Bei der **Sternschaltung** nach **Bild 2.1a** gilt

$$\sum_{k=1}^m i_k = 0, \quad (2.3)$$

und bei der **Polygonschaltung** ($m = 3$: Dreieckschaltung) nach **Bild 2.1b** gilt

$$\sum_{k=1}^m u_k = 0. \quad (2.4)$$

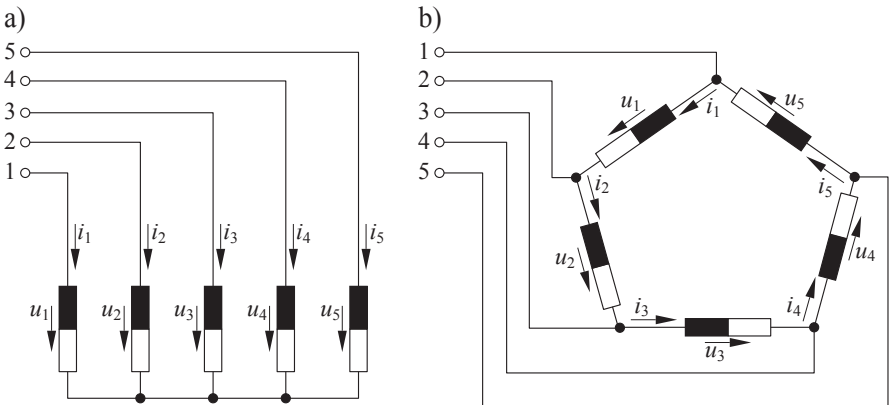


Bild 2.1 Fünfsträngige Sternschaltung (a) und Polygonschaltung (b) an einem Fünfleitersystem

In beiden Fällen wird das speisende **Mehrphasensystem** über ein m -Leiter-System geführt. Bei der Sternschaltung wäre ein $(m + 1)$ -ter Leiter denkbar, an den der Sternpunkt angeschlossen ist; Gl. (2.3) wäre dann nicht erfüllt.

Liegt ein **m -Leiter-System** vor und kennt man das angeschlossene Netzwerk nicht, dann kann man eine **Ersatz-Sternschaltung** kreieren, indem man für deren Strang- oder **Sternspannungen** die Bedingung Gl. (2.4) fordert. Diese Sternspannungen lassen sich somit aus den **Leiterspannungen** folgendermaßen berechnen:

$$u_k = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m u_{kl} . \tag{2.5}$$

u_{kl} ist die Spannung zwischen den Leitern k und l , wobei der Zählpfeil von k nach l weist. Die Strangströme, für die Gl. (2.3) gilt, sind dann identisch mit den **Leiterströmen**.

Für ein Fünfleitersystem als Beispiel wird die Bestimmung der Ersatz-Sternschaltung explizit durchgeführt. Die Forderung Gl. (2.4) ergibt

$$u_5 = -(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) .$$

Damit erhält man $m - 1 = 4$ linear unabhängige Maschengleichungen:

u_{12}	=	1	-1			u_1	
u_{23}			1	-1		u_2	
u_{34}				1	-1		u_3
u_{45}			1	1	1	2	u_4

Die Inversion dieses Gleichungssystems liefert die Sternspannungen:

u_1	= $\frac{1}{5}$	4	3	2	1	u_{12}
u_2		-1	3	2	1	u_{23}
u_3		-1	-2	2	1	u_{34}
u_4		-1	-2	-3	1	u_{45}

Das Ergebnis kann auf die durch Gl. (2.5) gegebene Form umgeschrieben werden:

$$u_1 = \frac{1}{5}(u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15}),$$

$$u_2 = \frac{1}{5}(u_{21} + u_{23} + u_{24} + u_{25}),$$

$$u_3 = \frac{1}{5}(u_{31} + u_{32} + u_{34} + u_{35}),$$

$$u_4 = \frac{1}{5}(u_{41} + u_{42} + u_{43} + u_{45}),$$

$$u_5 = \frac{1}{5}(u_{51} + u_{52} + u_{53} + u_{54}).$$

Die Schaltung von Bild 2.1a kann auch als die hier ermittelte Ersatzschaltung angesehen werden.

Bei einem Dreileitersystem ($m = 3$) folgt aus Gl. (2.5) für die Sternspannungen der Ersatzschaltung:

$$u_1 = \frac{1}{3}(u_{12} + u_{13}),$$

$$u_2 = \frac{1}{3}(u_{21} + u_{23}),$$

$$u_3 = \frac{1}{3}(u_{31} + u_{32}).$$

Mit den Vektoren Gl. (2.1) und Gl. (2.2) lässt sich der Augenblickswert der gesamten übertragenen **Leistung**, später in Abschnitt 2.6 als kollektive Augenblicksleistung $P_{\Sigma}(t)$ bezeichnet, berechnen:

$$P(t) = (\mathbf{i})^T (\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^m u_k i_k = P_{\Sigma}(t). \quad (2.6)$$

Im Fall $m = 5$ ergibt dieses Skalarprodukt

$$P(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4 + u_5 i_5.$$

Sind sämtliche Spannungen und Ströme periodisch mit der Periodendauer T , dann folgt für die **Wirkleistung**, die später als kollektive Wirkleistung P_{Σ} bezeichnet wird,

$$P = \overline{P(t)} = \sum_{k=1}^m P_k = P_{\Sigma} \quad (2.7)$$

mit

$$P_k = \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt. \quad (2.8)$$

Die Wirkleistungen P_k der einzelnen Zweipole oder Stränge können dann z. B. nach Gl. (1.8) bestimmt werden.

2.2 Transformation von Mehrphasensystemen

Mittels einer komplexen **leistungsinvarianten Transformation** kann man aus den Augenblickswerten der Ströme und Spannungen eines Mehrphasensystems komplexe Ersatzgrößen gewinnen, die eine einfachere und anschaulichere Beschreibung ermöglichen. Insbesondere Symmetrieeigenschaften und Oberschwingungsgehalte sind damit leichter darstellbar, wie später noch gezeigt wird. Die zunächst vorgestellte Transformationsvorschrift ist eine Verallgemeinerung derjenigen Transformation, die zur Bildung der später auch eingeführten so genannten symmetrischen Komponenten benutzt wird. Für Ströme und Spannungen gilt gleichermaßen

$$(i) = (C)(\underline{i}), \quad (u) = (C)(\underline{u}). \quad (2.9)$$

Die Transformationsmatrix

$$(C) = [(x_1), (x_2), (x_3), \dots, (x_m)] \quad (2.10)$$

ist aus Vektoren (x_k) aufgebaut mit

$$(x_k)^T = \frac{1}{\sqrt{m}} [\underline{a}^{0k}, \underline{a}^{-1k}, \underline{a}^{-2k}, \dots, \underline{a}^{-(m-1)k}], \quad (2.11)$$
$$k = 1, 2, \dots, m$$

und

$$\underline{a} = e^{j2\pi/m}. \quad (2.12)$$

Wegen der Eigenschaft des folgenden Skalarprodukts

$$(x_i)^*{}^T (x_k) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

wird das folgende dyadische Produkt gleich der Einheitsmatrix

$$(C)^{*T} (C) = \begin{array}{|c|} \hline (x_1)^{*T} \\ \hline (x_2)^{*T} \\ \hline \vdots \\ \hline (x_m)^{*T} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline (x_1) & (x_2) & \dots & (x_m) \\ \hline \end{array} = (E).$$

Die Transformationsmatrix (C) ist somit unitär

$$(C)^{-1} = (C)^{*T} \quad (2.13)$$

und die Inversion von Gl. (2.9) lautet

$$(\underline{i}) = (C)^{*T} (\underline{i}), \quad (\underline{u}) = (C)^{*T} (\underline{u}). \quad (2.14)$$

Die **Leistungsinvarianz** dieser Transformation wird durch Einsetzen von Gl. (2.9) in die Leistungsbeziehung Gl. (2.6) bestätigt:

$$P(t) = (\underline{i})^T (\underline{u}) \equiv (\underline{i})^{*T} (\underline{u}) = (\underline{i})^{*T} (C)^{*T} (C) (\underline{u}).$$

Mit Gl. (2.13) folgt daraus

$$P(t) = (\underline{i})^{*T} (\underline{u}) = \sum_{k=1}^m \dot{i}_k^* u_k. \quad (2.15)$$

Folgende Betrachtung, die für Ströme und Spannungen gleichermaßen gilt, wird stellvertretend für die Ströme durchgeführt. Nach Gl. (2.14) und Gl. (2.10) berechnen sich die neuen Ströme aus den alten wie folgt:

$$\dot{i}_k = (x_k)^{*T} (\underline{i}), \quad (2.16)$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

Da die Vektoren (x_k) gemäß Gl. (2.11) die Eigenschaft

$$(x_{m-k}) = (x_k)^* \quad (2.17)$$

haben, resultiert für die transformierten Ströme

$$\dot{i}_{m-k} = \dot{i}_k^*. \quad (2.18)$$

Der Vektor (x_k) enthält für $k = m$ und, wenn m gerade ist, auch für $k = m/2$ nur reelle Elemente: