1. Einleitung

Die Untersuchung von geschalteten Systemen ist seit Beginn des elektronischen Zeitalters von fundamentalem Interesse. Schon im Jahre 1917 wurde von Abraham und Bloch der erste Multivibrator in den Annalen der Physik beschrieben [7]. Auf Grund des ersten Weltkrieges wurde diese Arbeit jedoch erst im Jahre 1919 veröffentlicht [8]. Mit Hilfe einer Elektronenröhre erzeugte der Multivibrator erstmals periodische Schaltsignale in Form von Relaxationsschwingungen auf komplett elektronischem Wege. Fast zur gleichen Zeit entwickelten Eccles und Jordan [9] ihr "ionisches Relais", welches heute als erste Realisierung des Flipflops gilt. Weitere Arbeiten zur Erzeugung von Relaxationsschwingungen, oder auch Kippschwingungen genannt, entstanden im Jahre 1926 von Friedländer [10], [11] und [12]. In diesen Arbeiten wurde ausführlich beschrieben, wie mittels Elektronenröhren, Glimmlampen oder Lichtbögen periodische Schwingungen mit nur einem Energiespeicher erzeugt werden können. Hierbei wurden bereits *Sprungvorgänge* als Ursache von Relaxationsschwingungen aufgezeigt. Im Jahre 1934 entwickelte Schmitt seine berühmte "thermionische Trigger-Schaltung", die ebenfalls schnelle Schaltvorgänge (*Sprünge*) aufzeigte und veröffentlichte diese im Jahre 1938 [13].

Das erste mathematische Konzept zur Analyse eines Multivibrators erstellte der holländische Physiker B. van der Pol im Jahre 1926 [14]. In seiner Arbeit formulierte er die berühmte Differentialgleichung des Van-der-Pol-Oszillators, welche mittels einer geeigneten Umformung als singulär gestörtes Differentialgleichungssystem dargestellt werden kann. In den Folgejahren entstand eine Vielzahl von Arbeiten über die Theorie singulär gestörter Systeme. Zu den wohl wichtigsten zählen die Arbeiten von Tikhonov [15], Mishchenko und Pontryagin [16], Mishchenko und Rozov [17] und O'Malley [18]. Andere Ansätze, die ebenfalls in der Theorie der singulär gestörten Systeme verankert sind, finden sich in den Methoden der Multiplen Zeitskalen [19] und der Regularisierungstheorie [20]. Ein weiterer Ansatz zur Analyse von Relaxationschwingungen wurde von Andronov und Witt [21] vorgestellt. Die russischen Wissenschaftler formulierten ein *Sprung*-Postulat, mit dem sie die transienten Lösungen degenerierter, linearer Schaltungen bestimmen konnten und "diskontinuierliche Schwingungen" erzielten [22, S. 645ff.].

Eng verwandt mit singulär gestörten Systemen und Sprung-Effekten sind die sogenannten "nicht passierbaren Punkte" oder "Impasse-Punkte" [23]. Verschiedene Arbeiten, in denen die Problematik von Impasse-Punkten untersucht wurden, sind unter anderen Ponzo und Wax [24], Chua und Deng [25], [26], Sastry und Desoer [27], Reissig [28] und Riaza [29].

Diese speziellen Impasse-Punkte erlangten vor allem im Bereich der Schaltkreissimulation und folglich in der Analyse von Differential-algebraischen Gleichungen (Differential Algebraic Equation (DAE)s) großes Interesse.

Die Schaltkreissimulation ist ein zentrales Hilfsmittel beim Entwurf elektronischer Schaltungen. Trotz erfolgreicher Entwicklungsarbeiten im Hinblick auf die Konstruktion robuster Schaltkreissimulatoren existieren noch diverse Probleme, wie z.B. das Zeitkonstantenproblem bei der Simulation von Schaltvorgängen. Schon Branin [30] formulierte im Jahre 1967, dass das Hauptproblem, dem man sich bei der transienten Simulation gegenüber sieht, das Durchbrechen der minimalen Zeitkonstante sei.

Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit Schaltungen mit schnellen Schaltvorgängen untersucht. Diese können der Klasse von Systemen zugeordnet werden, deren Merkmal u.a. weit auseinander liegende Zeitkonstanten darstellen. Eine Möglichkeit diese Systeme zu analysieren, besteht mittels der Theorie singulär gestörter Systeme.

Der in dieser Arbeit gewählte Zugang erfolgt jedoch mittels einer geometrischen Betrachtung. Dabei wird die Menge aller zugelassenen Ströme und Spannungen im Netzwerk $\mathcal{N}$ als Konfigurationsraum $\mathcal{S}$ definiert. Es wird gezeigt, dass Impasse-Punkte als Falten im Konfigurationsraum $\mathcal{S}$ interpretiert werden können. Weist der Konfigurationsraum $\mathcal{S}$ keine Falte auf, so verläuft die transiente Lösung regulär auf $\mathcal{S}$. Weist der Konfigurationsraum $\mathcal{S}$ jedoch eine Falte bezüglich einer Netzwerk-spezifischen Projektionsrichtung auf (sprich es existieren Impasse-Punkte), so kann die transiente Lösung nicht über die Falte hinaus fortgesetzt werden. Im Gegenteil, die transiente Lösung bricht ab einem gewissen Zeitpunkt, abhängig von der minimalen Schrittweite des Simulationscomputers, ab. Dieses Phänomen deutet darauf hin, dass die Modellierung des Netzwerks unvollständig ist und mit Hilfe von parasitären Elementen nach dem Tikhonov-Theorem [31] erweitert werden muss. Solch parasitäre Elemente sind in der Realität in jedem physikalischen Netzwerk enthalten, werden jedoch oftmals aufgrund ihrer, im Vergleich zu anderen Netzwerkparametern, kleinen Größe vernachlässigt. Diese Vernachlässigung ist immer dann harmlos, wenn dadurch keine Impasse-Punkte in der resultierenden Netzwerkbeschreibung entstehen. Werden die parasitären Elemente falsch platziert, kann das Netzwerk zwar regularisiert sein, jedoch erhält man Ergebnisse die bezüglich des ursprünglichen Netzwerks $\mathcal{N}$ inkonsistent sind (vgl. [32], [33]). Des Weiteren müssen für regularisierte Netzwerke, aufgrund ihrer weit auseinander liegenden Zeitkonstanten, spezielle Integrations-Verfahren verwendet werden, um numerische Schwierigkeiten zu vermeiden [34].

In dieser Arbeit sollen zunächst die problematischen Schaltungsklassen identifiziert werden. Basierend auf den zuvor genannten Arbeiten (wie z.B. [22], [27], [28]) soll anschließend ein geometrisches Konzept entwickelt werden, mittels dessen die Simulation von degenerierten elektronischen Schaltungen auch ohne eine Regularisierung erfolgen kann. Dabei wird vor allem auf den Ergebnissen von Andronov und Witt [21], Chua und Deng [25], [26], Chua und Rohrer

[35], Sastry und Desoer [27] und Reissig [28] aufgebaut. Das geometrische Konzept besteht im Wesentlichen darin, die Impasse-Punkte als Absprungpunkte der transienten Lösung zu definieren und mittels geeigneter Zusatzbedingungen die zugehörigen Auftreffpunkte, die in dieser Arbeit als Hit-Punkte bezeichnet werden, zu identifizieren.

Eine besondere Schwierigkeit besteht dabei darin, den *richtigen* Hit-Punkt bei einem mehrfach gefaltetem Konfigurationsraum zu bestimmen. Die theoretische Existenz von mehrfach gefalteten Konfigurationsräumen wurde schon von Brayton und Moser [36], Andronov et al. [22] und Chua et al. [32] aufgezeigt. Andronov und Witt formulierten in ihren Arbeiten [22, S. 705f.], [37, S. 292f.] ein Sprung-Postulat für degenerierte, lineare Schaltungen. Jedoch haben sie darauf hingewiesen, dass der Hit-Punkt auf $\mathcal{S}$ in nichtlinearen Schaltungen im Allgemeinen nicht eindeutig ist und eine weitere Bedingung aufgestellt werden muss, sobald eine Mehrfachfaltung von $\mathcal{S}$ vorliegt. Chua und Alexander [32] formulierten in ihrer Arbeit ein einfaches Sprung-Postulat für mehrfach gefaltete Konfigurationsräume, welches lediglich besagt, dass der "nächste" Hit-Punkt der richtige ist. Ein Beweis für dieses postulierte Verhalten steht jedoch immer noch aus! In dieser Arbeit soll eine Methode entwickelt werden, mittels derer die transiente Simulation auch bei mehrfach gefalteten Konfigurationsräumen sichergestellt werden kann.

Es soll ein geometrisches Konzept zur Simulation degenerierter elektronischer Schaltungen entwickelt werden. Dazu werden die Ergebnisse des geometrischen Ansatzes durch die Simulation des zugehörigen singulär gestörten Systems verifiziert. Zum Schluss sollen die entwickelten Konzepte auf einige Benchmarkschaltungen angewendet werden.

1.1. Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 werden die mathematischen Grundlagen von degenerierten Systemen detailliert herausgearbeitet. Es erfolgt zunächst eine Einführung in die Thematik von degenerierten Systemen. Dabei wird einleitend die geometrische Deutung von elektrischen Netzwerken und singulären Punkten auf Basis der Arbeiten von Smale, Haggman & Bryant [38], Matsumoto [39] und Mathis [40] vorgestellt. Im Anschluss daran werden die topologischen Eigenschaften von degenerierten Systemen aufgezeigt und das berühmte Beispiel des Van-der-Pol-Oszillators als degeneriertes System analysiert. In den darauffolgenden Abschnitten werden singulär gestörte Systeme, deren Regularisierung und die herkömmliche Berechnung von Impasse-Punkten auf Basis der Arbeiten von O'Malley [18], Chua & Alexander [32], Winkler [41] und Reissig [28] dargestellt. Anschließend erfolgt in Abschnitt 2.7 die Stabilitätsuntersuchung nichtlinearer Systeme. Dabei besteht das Hauptaugenmerk auf der Analyse der gemischten Potentialfunktion von Brayton & Moser. Diese Theorie bildet die Grundlage zur Definition einer verallgemeinerten Sprung-Bedingung für mehrfach gefaltete $\mathcal{S}$ und der analytischen Bestimmung der Einzugsbereiche stabiler Arbeitspunkte.

In Kapitel 3 wird ein geometrische Konzept zur Simulation degenerierter Systeme erarbeitet. Dabei wird zunächst die für das geometrische Konzept notwendige Modellierung von degenerierter Systemen auf Basis einer erweiterten Knotenpotenialanalyse vorgestellt 3.2. Im Anschluss daran erfolgt die Analyse des Konfigurationsraums 3.3: Zum Einen wird dort die Konfigurationsraumbestimmung mittels Geodätischer und deren Vor- und Nachteile vorgestellt. Zum Anderen wird die explizite Bestimmung des Konfigurationsraums und deren Vorteile vorgestellt. Dieses wird anhand eines Beispiels zweier in Reihe geschalteter N-Typ Nichtlinearitäten veranschaulicht. Des Weiteren wird in 3.3.3 gezeigt, dass mittels des geometrischen Konzeptes eine Deformation des Konfigurationsraums veranschaulicht und zur Analyse von Schaltungen genutzt werden kann. In Abschnitt 3.4 wird die Berechnung der Absprungpunkte sowohl auf dem herkömmlichen Wege, als auch mittels geometrischer Überlegungen vorgestellt. Dabei wird der Vorteil der geometrischen Berechnung herausgearbeitet und anschaulich an konkreten Beispielen visualisiert. In Abschnitt 3.5 wird anschließend die Hit-Punkt Berechnung für einfach und mehrfach gefaltete Konfigurationsräume vorgestellt. Dabei werden zur Berechnung der Hit-Punkte bei einfach gefaltetem $\mathcal{S}$ mehrere Methoden erarbeitet. Im Anschluss daran wird in Abschnitt 3.5.2 das Konzept zur Berechnung des Hit-Punktes bei mehrfach gefaltetem $\mathcal{S}$ behandelt. Dazu wird ein verallgemeinertes Sprung-Postulat für Gradientensysteme auf Basis der gemischten Potentialfunktion von Brayton & Moser entwickelt. In Abschnitt 3.6 wird der Sonderfall nichtlinearer Reaktanzen behandelt. Das Kapitel schließt mit der Darstellung der Grenzen des geometrischen Ansatzes in Abschnitt 3.7.

In Kapitel 4 wird dieses Konzept anhand ausgewählter Beispielschaltungen verifiziert. Dabei werden insbesondere Schaltungen auf Basis von Resonanztunneldioden (im englischen Resonant Tunneling Diode (RTD)) analysiert, da anhand dieser vergleichbar einfachen Schaltungen, relativ komplexe Fälle veranschaulicht werden können. Im Abschnitt 4.1.3 werden dabei erstmals alle möglichen Formationen des Konfigurationsraums von in Reihe geschalteten RTDs und die dafür notwendigen Bedingungen aufgezeigt. Des Weiteren werden die Einzugsbereiche der stabilen Arbeitspunkte der RTD Reihenschaltung analytisch bestimmt und messtechnisch verifiziert. Das in dieser Arbeit verallgemeinerte Sprung-Postulat wird in Abschnitt 4.1.3.3 dazu genutzt, die zugehörigen Hit-Punkte zu den einzelnen Absprungpunkten zu identifizieren. Alle Ergebnisse werden dabei immer mit den regularisierten Lösungen des entsprechenden Netzwerkes verglichen. In Abschnitt 4.1.4 wird sowohl die Schaltungsfunktionalität als auch erstmals das parasitäre Verhalten in mono- und bistabilen Logikelementen anschaulich auf Basis der in dieser Arbeit vorgestellten Methodik erläutert. Im letzten Abschnitt 4.2 dieses Kapitels, werden verschiedene Flipflop Schaltungen mit unterschiedlichen Transistormodellen auf Basis des geometrischen Konzeptes analysiert. Dieser Abschnitt soll dazu dienen, die universelle Einsetzbarkeit des geometrischen Konzeptes für unterschiedliche Ersatzmodelle zu veranschaulichen. Die Arbeit schließt mit der Zusammenfassung der erzielten Ergebnisse in Kapitel 5.