9 Entwurf von Zustandsregelungen

9.1 Struktur einer Zustandsregelung und Problematik

Wir wollen nunmehr Regelungen im Zustandsraum entwerfen und gehen dazu von einer linearen und zeitinvarianten Strecke aus, wobei hier wie im Folgenden die Stelleinrichtung zur Strecke geschlagen ist:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}\,, \tag{9.1}$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \tag{9.2}$$

mit konstanten Matrizen $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ vom Typ (n,n) bzw. (n,p) bzw. (q,n). Gegenüber der bisherigen Zustandsbeschreibung linearer und zeitinvarianter Systeme ist $\underline{D} = \underline{0}$ angenommen, wie es bei der überwiegenden Mehrzahl realer Systeme der Fall ist. Unter dem Ausgangsvektor ist hier der Vektor der Regelgrößen, also der gezielt zu beeinflussenden Größen, verstanden.

Bei der Eingangsmatrix $\underline{B}$ wird man im Realfall immer $p \leq n$ annehmen dürfen, d. h. die Zahl der Eingangsgrößen wird die Zahl der Zustandsvariablen nicht übersteigen. $\underline{B}$ hat daher höchstens den Rang p. Wir wollen annehmen, dass $\underline{B}$ *in der Tat den Rang p hat.* Angenommen nämlich, $\underline{B}$ habe einen kleineren Rang, dann sind die Spaltenvektoren $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_p$ von $\underline{B}$ linear abhängig. Es gelte

$$\begin{aligned}\underline{B}\,\underline{u} &= \underline{b}_1\,u_1 + \ldots + \underline{b}_p\,u_p = (u_1 + c_1 u_p)\underline{b}_1 + \ldots + \\ &\quad + (u_{p-1} + c_{p-1} u_p)\underline{b}_{p-1} = u_1^*\underline{b}_1 + \ldots + u_{p-1}^*\underline{b}_{p-1} = \\ &= \left[\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{p-1}\right]\begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_{p-1}^* \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Das heißt: Man kann den Einfluss der äußeren Größen auf das System von vornherein in der letzteren Form, also mittels der verkürzten Eingangsmatrix $[\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{p-1}]$ und der Eingangsgrößen $u_1^*, \ldots, u_{p-1}^*$ beschreiben. Falls $u_1, \ldots, u_p$ Steuergrößen sind, über die man verfügen kann, ist u_p überflüssig, da sich die Wirkung von u_p durch geeignete Bemessung von $u_1, \ldots, u_{p-1}$ ersetzen lässt. Entsprechend wollen wir bei der Ausgangsmatrix $\underline{C}$ voraussetzen, dass sie den *Höchstrang* q aufweist[1].

1 Es sei angemerkt, dass linear abhängige Spalten von $\underline{B}$ bzw. Zeilen von $\underline{C}$ beispielsweise im Fall redundanter Aktoren bzw. Sensoren auftreten, den wir aber im Rahmen dieses Buchs nicht betrachten.

Man kann die Zustandsgleichungen als Strukturbild darstellen. Dazu muss man die Vektordifferentialgleichung integrieren. Einen Vektor oder allgemein eine Matrix integriert man gliedweise. Das bedeutet beispielsweise für $\underline{x}(t)$:

$$\int_{t_0}^{t} \dot{\underline{x}}(\tau)\,d\tau = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_{t_0}^{t} \dot{x}_1(\tau)\,d\tau \\ \vdots \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} \dot{x}_n(\tau)\,d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t) - x_n(t_0) \end{bmatrix} = \\ = \underline{x}(t) - \underline{x}(t_0).$$

Daher folgt aus (9.1)

$$\underline{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \Big(\underline{A}\,\underline{x}(\tau) + \underline{B}\,\underline{u}(\tau)\Big)\,d\tau + \underline{x}(t_0).$$

Zusammen mit (9.2) ergibt sich so Bild 9-1. Die doppelt gezogenen Wirkungslinien sollen auf den Vektorcharakter der zeitveränderlichen Größen hinweisen.

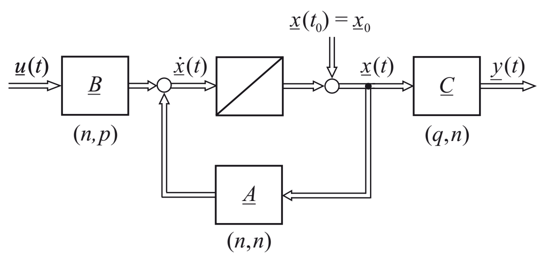

Bild 9-1: Strecke (System, Prozess) in Zustandsdarstellung

Auf die Strecke wirkt die Anfangsstörung $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ ein. Sie ist normalerweise nicht bekannt. Bei allgemeinen Untersuchungen nimmt man deshalb an, dass sie beliebig im Zustandsraum liegen kann. Die erste Forderung an die zu entwerfende Regelung besteht darin, die Wirkung dieser Anfangsstörung zu beseitigen und so die Regelgrößen auf ihren Sollwerten zu halten. Da die Anfangsstörung nicht bekannt ist, macht dies eine Rückführung erforderlich, damit man so durch die laufende Erfassung des Streckenverhaltens und seines Vergleichs mit dem Sollverhalten genügend Information zur gezielten Beeinflussung der Strecke erhält. Dies ist im vorliegenden Fall die „regelungstechnische Grundsituation“, wie sie in Kapitel 1 geschildert wurde: Forderung nach selbsttätiger gezielter Beeinflussung bei unvollständiger Systemkenntnis. Wie stets erfordert sie eine Rückführung.

Da die Strecke in Zustandsbeschreibung gegeben ist, liegt es nahe, den Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ zurückzuführen. Lässt man fürs Erste seinen Sollverlauf außer Acht, so ist der allgemeinste Ansatz für eine solche Rückführung von der Form

$$\underline{u} = -\underline{r}\left(\underline{x}(t), t\right) \tag{9.3}$$

mit einer beliebigen Vektorfunktion $\underline{r}$. Es ist unnötig, zusätzliche Differentiationen und Integrationen des Zustandsvektors in die Rückführung aufzunehmen. Ist nämlich t_1 ein beliebiger Zeitpunkt, so hängt der gesamte weitere Verlauf des Zustandsvektors $\underline{x}(t)$ der über (9.3) rückgeführten Strecke allein von $\underline{x}(t_1)$ ab, nicht jedoch von irgendwelchen früheren Werten von $\underline{x}(t)$, wie sie in Ableitung und Integral ihren Niederschlag finden. Daher genügt es, den Steuervektor $\underline{u}$ als Funktion von $\underline{x}$ allein (und eventuell der Zeit t) anzusetzen. Wenn nicht *alle* Zustandsvariablen zurückgeführt werden oder Störgrößen zu berücksichtigen sind, gilt diese Argumentation jedoch nicht mehr.

Soll es sich um ein *lineares* Rückführungsgesetz handeln, so muss

$$\underline{u}(t) = -\underline{R}(t)\,\underline{x}(t) \tag{9.4}$$

sein. Falls überdies noch Zeitinvarianz gefordert wird, entsteht daraus das Rückführungsgesetz

$$\underline{u}(t) = -\underline{R}\,\underline{x}(t) \tag{9.5}$$

mit einer konstanten (p,n)-Matrix $\underline{R}$. Ausführlich lautet es:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\left(r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \ldots + r_{1n}x_n\right), \\ &\;\;\vdots \\ u_p &= -\left(r_{p1}x_1 + r_{p2}x_2 + \ldots + r_{pn}x_n\right), \end{aligned} \tag{9.6}$$

wobei r_{ik} die konstanten Einträge der Rückführmatrix $\underline{R}$ sind. Es werden also die einzelnen Systemzustände proportional auf die Steuergrößen zurückgeführt, weswegen wir (9.5) bzw. (9.6) als *Zustandsrückführung* bezeichnen wollen. Die Struktur der damit versehenen Strecke zeigt Bild 9-2 (wobei im Hinblick auf die folgenden Betrachtungen das Rückführgesetz in der Form $\underline{u} = \underline{R}(-\underline{x})$ verwendet wurde).

Fasst man die Gleichungen (9.1) und (9.5) zusammen, so erhält man die Beziehung

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R})\,\underline{x}\,. \tag{9.7}$$

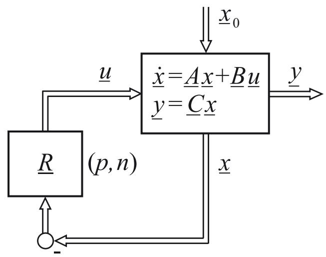

Bild 9-2: Strecke mit Zustandsrückführung

Sie stellt die *Differentialgleichung der zustandsrückgeführten Strecke* in Bild 9-2 dar. Bezeichnet man deren Trajektorie $\underline{x}(t;\, t_0,\, \underline{x}_0)$, die zum Zeitpunkt t_0 durch die Anfangsstörung $\underline{x}_0$ erzeugt wird, als *Störtrajektorie*, so kann man die oben schon formulierte Forderung an die zu bestimmende Regelung nunmehr als *Forderung I* präzisieren:

Die Rückführmatrix $\underline{R}$ ist so zu wählen, dass beliebige Störtrajektorien der entsprechend Bild 9-2 zustandsrückgeführten Strecke für $t \to +\infty$ gegen Null streben. (9.8)

Der Stabilitätsdefinition in Abschnitt 8.4 zufolge heißt das:

$\underline{R}$ ist so zu wählen, dass die hierüber zustandsrückgeführte Strecke asymptotisch stabil ist. (9.9)

Die angestrebte Zustandsregelung soll aber nicht nur die Anfangsstörung ausregeln, sondern ganz ähnlich wie die klassische Regelung einen gewünschten Verlauf der Ausgangsgröße sichern. Daher stellt man an sie die *Forderung II:*

Der Ausgangsvektor (Vektor der Regelgrößen) $\underline{y}$ soll für $t \to +\infty$ gegen den vorgegebenen Führungsvektor $\underline{w}$ streben. (9.10)

Da $\underline{w}$ bekannt ist, kann diese Forderung durch eine Steuerungsmaßnahme erreicht werden, die man der Zustandsrückführung vorschaltet: Sie erzeugt aus dem Führungsvektor $\underline{w}$ den Sollverlauf $\underline{x}_S$ für den Zustandsvektor sowie den zur Erzielung dieses Sollverlaufs im ungestörten Fall erforderlichen Steuervektor $\underline{u}_S$. Beschränkt man sich dabei auf *Führungsvektoren $\underline{w}$, die für $t \to +\infty$ gegen einen festen Wert $\underline{w}_\infty$ streben oder einen solchen nach endlicher Zeit annehmen, und* auf die *Vorgabe des Sollverhaltens im eingeschwungenen Zustand*, so können die Sollverläufe gemäß

$$\underline{x}_S = \underline{M}_x\,\underline{w}\,, \quad \underline{u}_S = \underline{M}_u\,\underline{w} \tag{9.11}$$

mit konstanten Matrizen $\underline{M}_x$ und $\underline{M}_u$ vom Typ (n,q) bzw. (p,q) gebildet werden. Dies führt auf die in Bild

9-3 dargestellte Struktur einer *Zustandsregelung mit statischer Vorsteuerung*.

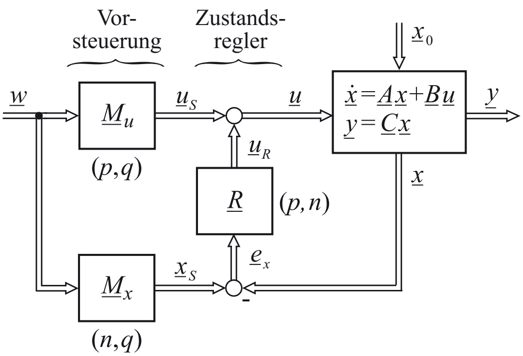

Bild 9-3: Zustandsregelung mit statischer Vorsteuerung

Es wird nun über $\underline{R}$ nicht mehr wie bisher der Zustandsvektor $\underline{x}$ selbst, sondern vielmehr dessen Soll-Istabweichung

$$\underline{e}_x = \underline{x}_S - \underline{x} \tag{9.12}$$

(im Weiteren auch *Zustandsdifferenz* genannt) zurückgeführt - und zwar mit dem Ziel, diese möglichst zu Null abzubauen und so das über $\underline{u}_S$ in Abhängigkeit von $\underline{w}$ vorgegebene Sollverhalten einzustellen. Daher sprechen wir nunmehr von einer *Zustandsregelung* und bezeichnen den durch

$$\underline{u}_R = \underline{R}(\underline{x}_S - \underline{x}) = \underline{R}\,\underline{e}_x \tag{9.13}$$

gegebenen proportionalen Zusammenhang als *Zustandsregler oder kurz* als *Regler*; dieser stellt offensichtlich eine Verallgemeinerung des klassischen P-Reglers dar. Dem Zustandsregler vorgeschaltet ist die durch Gleichung (9.11) beschriebene Steuereinrichtung zur Erzeugung der Sollverläufe aus dem Führungsvektor $\underline{w}$, die dementsprechend als *Vorsteuerung* bezeichnet wird. Letztlich beaufschlagt wird die Strecke mit

$$\underline{u} = \underline{u}_S + \underline{u}_R\,, \tag{9.14}$$

also der additiven Überlagerung der Anteile von Vorsteuerung und Regler.

Setzt man die Gleichungen (9.11), (9.13) für Vorsteuerung und Regler in das Stellgesetz (9.14) ein, so folgt

$$\begin{aligned}\underline{u} &= \underline{M}_u\,\underline{w} + \underline{R}(\underline{M}_x\,\underline{w} - \underline{x})\\ &= (\underline{M}_u + \underline{R}\,\underline{M}_x)\,\underline{w} - \underline{R}\,\underline{x}\end{aligned}$$

oder

$$\underline{u} = \underline{M}\,\underline{w} - \underline{R}\,\underline{x}\,, \tag{9.15}$$

wenn abkürzend

$$\underline{M} = \underline{M}_u + \underline{R}\,\underline{M}_x \tag{9.16}$$

geschrieben wird. Ausgehend von dieser Form des Stellgesetzes kann die Zustandsregelung aus Bild 9-3 auch gemäß Bild 9-4 als *Zustandsrückführung mit statischem Vorfilter* aufgebaut werden.

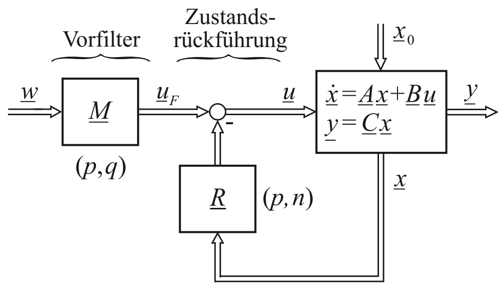

Bild 9-4: Aufbau einer Zustandsregelung als Zustandsrückführung mit Vorfilter

Bei Wahl der (p,q)-*Vorfiltermatrix* $\underline{M}$ entsprechend Gleichung (9.16) verhalten sich beide Strukturen identisch, d. h. auf die gleiche Anregung $\underline{w}$ und $\underline{x}_0$ reagieren beide Strukturen mit den gleichen Antworten für $\underline{x}$ und $\underline{y}$. Jedoch fehlt in Bild 9-4 ein Soll-Istwert-Vergleich und mithin ein wesentliches Strukturelement einer Regelung, denn die Ausgangsgröße $\underline{u}_F$ des Vorfilters stellt hier im Allgemeinen keinen Sollverlauf dar, dem der Reglerausgang möglichst folgen soll.[2] Darüber hinaus ist die Vorfiltermatrix $\underline{M}$ über Gleichung (9.16) offensichtlich abhängig vom Zustandsregler $\underline{R}$, während die Vorsteuermatrizen $\underline{M}_u$ und $\underline{M}_x$ – wie der nächste Abschnitt zeigen wird – allein auf Basis der Streckenzustandsgleichungen und somit unabhängig vom Zustandsregler $\underline{R}$ entworfen werden können. Zudem lässt sich die Regelungsstruktur mit statischer Vorsteuerung nach Bild 9-3 geradlinig auf den dynamischen Fall und damit die Möglichkeit der getrennten Einstellung von Führungs- und Störverhalten im Sinne einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelung erweitern (siehe Abschnitt 9.2). Im Hinblick auf die-

2 Man betrachte eine gemäß Forderung I und II entworfene Regelung und nehme an, $\underline{u}_F$ sei Sollverlauf für den Reglerausgang. Dann müssten beide zumindest im eingeschwungenen Zustand übereinstimmen, also $\underline{u}_\infty = \underline{0}$ gelten. Bei Strecken mit regulärer $\underline{A}$-Matrix hätte dies $\underline{x}_\infty = -\underline{A}^{-1}\underline{B}\,\underline{u}_\infty = \underline{0}$ und somit auch $\underline{y}_\infty = \underline{C}\,\underline{x}_\infty = \underline{0}$ zur Folge. Forderung II wäre somit für alle Führungsgrößen-Stationärwerte $\underline{w}_\infty \neq \underline{0}$ verletzt, das heißt: Die Annahme, $\underline{u}_F$ sei Sollverlauf, führt hier in der Regel auf einen Widerspruch und ist daher im Allgemeinen nicht zutreffend.

se Sachverhalte empfiehlt es sich, dem *Entwurf* von Zustandsregelungen deren Aufbau *als Zustandsregler mit Vorsteuerung gemäß Bild 9-3* zugrunde zu legen - und nicht den bislang in der regelungstechnischen Literatur fast ausschließlich gebräuchlichen Aufbau nach Bild 9-4. Der Übergang in diese herkömmliche Darstellung ist allerdings mit Hilfe der Vorfiltergleichung (9.16) jederzeit möglich.

Vergegenwärtigen wir uns abschließend die charakteristischen Merkmale der im Weiteren zu entwerfenden Regelungsstruktur!

(I) Zunächst ist festzuhalten, dass es sich um eine *Regelung ganz im klassischen Sinne* handelt. Der Zustandsvektor wird als Regelgröße laufend erfasst, mit seinem Sollverlauf verglichen und die sich ergebende Differenz zur Ansteuerung des Reglers verwendet, der diese Soll-Istabweichung möglichst zu Null abbauen soll.

Genau wie bei der klassischen Regelung kommt es auch bei der Zustandsregelung auf das Führungs- und Störverhalten an.

(II) Im Zustandsregler $\underline{u}_R = \underline{R}(\underline{x}_S - \underline{x})$ benötigt man den gesamten Zustandsvektor, wenn man den Regler etwa durch eine elektronische Schaltung oder einen Rechneralgorithmus realisieren will. Nun wird man aber die Zustandsvariablen nur in Ausnahmefällen sämtlich messtechnisch erfassen, während dies im Allgemeinen viel zu aufwendig ist. Daher ist es notwendig, aus den Messgrößen des Systems den gesamten Zustandsvektor zumindest näherungsweise zu rekonstruieren. Dies leistet ein dynamisches System, das nach seinem Erfinder *Luenberger-Beobachter* genannt und im vorletzten Abschnitt dieses Kapitels behandelt wird.

(III) Auf die Zustandsregelung in Bild 9-3 wirkt als *Störeinfluss nur die Anfangsstörung* $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ ein, aber keine länger dauernde Störgröße, wie man sie von der klassischen Regelung her gewohnt ist und wie sie in der Realität in der Tat auftritt.

Dies ist ein wirklichkeitsfremder Zug in der ursprünglichen Form der Zustandsmethodik, der ihre Herkunft aus der Differentialgleichungstheorie verrät. Er kann auf verschiedene Weise beseitigt werden, wie im letzten Abschnitt dieses Kapitels gezeigt wird.

Vorläufig stützen wir uns aber auf die Struktur der Zustandsregelung in Bild 9-3 und haben nun die Reglermatrix $\underline{R}$ sowie die Vorsteuermatrizen $\underline{M}_u$ und $\underline{M}_x$ entsprechend den Forderungen I und II an die Regelung zu bestimmen. Das *Hauptproblem* besteht in der *geeigneten Bestimmung von* $\underline{R}$. Hierfür werden drei verschiedenartige Vorgehensweisen beschrieben:

- Polvorgabe oder Eigenwertvorgabe (Abschnitt 9.3),
- Minimierung eines quadratischen Gütemaßes (Abschnitt 9.4),
- Entkopplung nach ***Falb*** *und* ***Wolovich*** (Abschnitt 9.5).

Eine vierte Vorgehensweise ist der *Entwurf auf endliche Einstellzeit* („dead beat response"). Da er von Natur aus direkt mit Abtastsystemen (zeitdiskreten Systemen) verknüpft ist, soll er in diesem Buch nicht behandelt werden (siehe etwa [9.1], Abschnitt 7.5). Er hängt mit dem Verfahren der Polvorgabe zusammen, wird aber durch dieses nicht abgedeckt, da z. B. auch ein zeitoptimaler Entwurf, der nichts mit Polvorgabe zu tun hat, ein besonderer Entwurf auf endliche Einstellzeit ist.

Bevor wir uns an die Bestimmung des Reglers begeben, sei im nächsten Abschnitt die Berechnung der Vorsteuerung vorausgeschickt, da sie (besonders für die hier betrachtete Klasse von Führungsvektoren $\underline{w}$ mit festem Endwert $\underline{w}_\infty$) erheblich einfacher zu erledigen ist.

9.2 Entwurf der Vorsteuerung

Aus Bild 9-3 liest man für die Zustandsregelung mit statischer Vorsteuerung folgende Gleichungen ab:

$$\begin{aligned}
&\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}\,,\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0\,,\\
&\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}\,,\\
&\underline{u} = \underline{u}_S + \underline{u}_R\,,\\
&\underline{u}_S = \underline{M}_u\,\underline{w}\,,\\
&\underline{u}_R = \underline{R}(\underline{x}_S - \underline{x}),\\
&\underline{x}_S = \underline{M}_x\,\underline{w}\,.
\end{aligned}$$

Zum Vorsteuerungsentwurf betrachten wir die ungestörte Strecke ($\underline{x}_0 = \underline{0}$) und nehmen an, wir hätten eine Vorsteuerung, die dieser Strecke das geforderte Sollverhalten $\underline{y} = \underline{w}$ sowie $\underline{x} = \underline{x}_S$ verleiht. Es gilt dann $\underline{u}_R = \underline{0}$ und folglich $\underline{u} = \underline{u}_S$, so dass das Sollverhalten beschrieben wird durch

$$\begin{aligned}
&\underline{\dot{x}}_S = \underline{A}\,\underline{x}_S + \underline{B}\,\underline{u}_S\,,\\
&\underline{w} = \underline{C}\,\underline{x}_S
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
&\underline{u}_S = \underline{M}_u\,\underline{w}\,,\\
&\underline{x}_S = \underline{M}_x\,\underline{w}\,.
\end{aligned}$$

Legt man nun den häufig vorkommenden Fall zugrunde, dass der Führungsvektor $\underline{w}$ einen konstanten Wert