2. Grundlagen zu Messspulen

2.1 Magnetisches Feld einer Spule

Die Spule stellt ein fundamentales Bauelement der Elektrotechnik mit einem vielseitigen Einsatzspektrum dar. In den meisten Anwendungen besteht die Spule aus einem Draht, z. B. Kupferlackdraht, der um einen festen Körper gewickelt ist. Die Spule erzeugt einerseits durch einen eingeprägten Strom ein Magnetfeld, das die magnetische Energie speichert, und dient andererseits als ein passives Bauelement mit einer bestimmten Induktivität.

Im Allgemeinen ist der magnetische Fluss Φ Repräsentant des magnetischen Feldes und kann durch die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}$ dargestellt werden. Der Zusammenhang zwischen dem magnetischen Fluss Φ durch eine beliebige Fläche $\boldsymbol{a}$ und der magnetischen Flussdichte $\boldsymbol{B}$ kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$\Phi = \int_a \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \, . \qquad (2.1)$$

Nach dem Induktionsgesetz ergibt sich eine von einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld induzierte Spannung u_i aus der zeitlichen Ableitung des umfassten magnetischen Flusses Φ [1], d. h.

$$u_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \, . \qquad (2.2)$$

Aufgrund des zeitlich veränderlichen Magnetfeldes als Ursache für die induzierte Spannung sind drei Wirkungen für die Änderung des magnetischen Feldes möglich:

- Zeitlich veränderlicher Strom durch den Leiter,
- Bewegung des geschlossenen Leiters durch ein magnetisches Feld,
- Bewegung von magnetisierbarem Material im magnetischen Feld.

Im vorliegenden Fall wird lediglich die erste Möglichkeit betrachtet. Für eine Spule mit n Windungen wird der verkettete Fluss ψ in Abhängigkeit von dem durch die v-te Windung durchfließenden magnetischen Fluss Φ_v im Folgenden definiert:

$$\psi = \sum_{v=1}^{n} \Phi_v \, . \qquad (2.3)$$

Dabei ist es möglich, einen Mittelwert des magnetischen Flusses Φ_0 für jede Windung anzunehmen:

$$\psi = n \, \Phi_0 \, . \qquad (2.4)$$

Daher ergibt sich aus (2.2) und (2.4) die induzierte Spannung einer Spule mit n Windungen:

$$u_i = -n \frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}t} \, . \qquad (2.5)$$

2.2 Selbstinduktivität und Gegeninduktivität

Da der verkettete Fluss ψ vom Strom i und der Selbstinduktivität L_s abhängt, wird die Selbstinduktivität L_s wie folgt definiert:

$$L_s = \frac{\psi}{i} = \frac{n\,\Phi_0}{i}. \tag{2.6}$$

Aus den Gleichungen (2.5) und (2.6) ergibt sich die induzierte Spannung in Abhängigkeit von der Selbstinduktivität:

$$u_i = -L_s \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{2.7}$$

Die Selbstinduktivität einer Spule kann auch durch den eingeprägten Strom i und die dazu erzeugte magnetische Energie W_m berechnet werden. Dabei kann die magnetische Energie durch das Integral der von der Spule erzeugten Feldgrößen $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{H}$ in dem gesamten Raum ermittelt werden. Nach dem Biot-Savart-Gesetz lässt sich die ortsabhängige magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ im betrachteten Raum auf folgende Weise bestimmen:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu\, i}{4\pi} \int_l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{2.8}$$

wobei $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ den Vektor des Leiterstücks und $\boldsymbol{r}$ den Abstandsvektor bezeichnen. μ ist die Permeabilität im betrachteten Raum.

Angemerkt sei, dass die magnetische Flussdichte von der Spulenform und der Permeabilität im betrachteten Raum abhängig ist. Somit kann die Selbstinduktivität einer Spule durch den Entwurf der Spulenform oder Verwendung eines permeablen Spulenkerns geändert werden.

Analog zur Beschreibung der Selbstinduktivität einer Spule wird hier die Gegeninduktivität zwischen zwei Spulen weiter betrachtet (siehe Abbildung 2.1). Diese Zweispulenanordnung ist eine der wichtigsten Baugruppen in der Elektrotechnik und wird als Umspanner, Übertrager und Messwandler verwendet [2]. Wird die erste, sogenannte Primärspule, mit einem zeitlich veränderlichen Strom i_1 durchströmt, wird in der zweiten, sogenannten Sekundärspule, durch einen verketteten Magnetfluss ψ_{12} eine Spannung induziert. Die entsprechende Gegeninduktivität L_{12} zwischen zwei Spulen kann nach (2.6) beschrieben werden:

$$L_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_1} = \frac{n_2 \Phi_{12}}{i_1}, \tag{2.9}$$

wobei n_2 die Windungszahl der Sekundärspule ist. Φ_{12} bezeichnet den Mittelwert des verketteten magnetischen Flusses durch jede Windung der Sekundärspule.

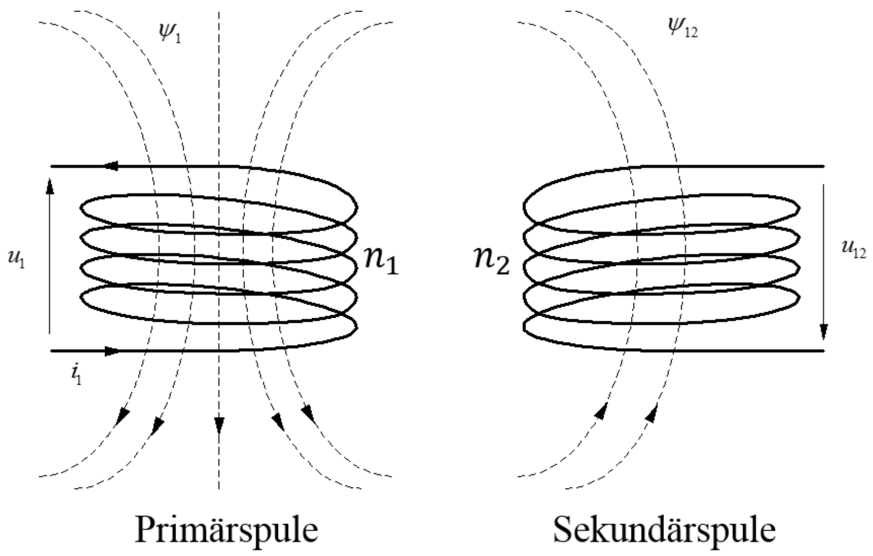

Abbildung 2.1: Magnetische Kopplung zweier Spulen

Zudem wird vorausgesetzt, dass bei der magnetischen Kopplung zweier Spulen der Feldraum eine konstante Permeabilität μ besitzt. Dadurch kann die induzierte Spannung der Sekundärspule u_{12} im Frequenzbereich gemäß Gl. (2.10) beschrieben werden:

$$u_{12} = -j\omega L_{12} i_1 \, , \tag{2.10}$$

wobei ω die Kreisfrequenz ist.

Analog dazu folgt die Spannung an der Primärspule u_1 der Beziehung:

$$u_1 = -u_i = j\omega L_1 i_1 \, . \tag{2.11}$$

Anhand von (2.8) und der Annahme der konstanten Permeabilität im Feldraum ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen der Induktivität und der Permeabilität. Diese Beziehung gilt ebenfalls für die Gegeninduktivität. Jedoch ist es analytisch schwierig, die Selbstinduktivität oder die Gegeninduktivität mit inhomogenem Material zu bestimmen. Weiterhin können die magnetischen Eigenschaften des inhomogenen Materials ebenfalls nicht berechnet werden. Daher wird eine approximierte Funktion zur Berechnung der Selbst- oder Gegeninduktivität im inhomogenen Material benötigt, welche nur durch numerische Simulation ermittelt werden kann.

2.3 Einsatz von Messspulen

Im Vakuum kann die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}$ durch die Permeabilität im Vakuum μ_0 und die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ beschrieben werden:

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \, . \tag{2.12}$$

Aufgrund der magnetischen Eigenschaft des Materials kann man die magnetische Flussdichte in einem unendlichen ausgedehnten und homogenen Medium gemäß Gl. (2.13) beschreiben:

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} \, , \tag{2.13}$$