1 Einführung in die Theorie der zeitdiskreten Regelungen

1.1 Grundstruktur zeitdiskreter Regelungen

Bei der in die Regelungstechnik einführenden Literatur sowie bei entsprechenden Einführungsvorlesungen oder -seminaren wird stets davon ausgegangen, dass die Stellgrößen zu jedem Zeitpunkt veränderbar sind und somit ununterbrochen die Regelstrecke beeinflussen können. Das ist aus didaktischer Sicht durchaus eine zweckmäßige Annahme, weil sich dadurch die Systembeschreibung einfacher gestaltet und man sich auf die grundsätzlichen Zusammenhänge konzentrieren kann. In den heutzutage weitaus meisten Anwendungen erfolgt die Regelung allerdings prozessorgesteuert, so dass wegen dessen endlicher Verarbeitungsgeschwindigkeit die Stellgrößen nur in bestimmten zeitlichen Abständen verändert werden können. Neben dem Prozessor selbst begrenzen aber auch die üblicherweise eingesetzten Analog/Digital-Wandler den Durchsatz in der Signalverarbeitung, wobei jedoch die Rechenzeit eines klassischen Mikroprozessors deutlich größer ist als die Wandlungszeit eines fortschrittlichen Analog/Digital-Wandlers. Moderne FPGAs (Field Programmable Gate Arrays) sind dagegen in der Lage, den gesamten Regelalgorithmus während der Wandlungszeit abzuarbeiten, so dass dann wieder der Analog/Digital-Wandler das begrenzende Element bei der Stellgrößengenerierung ist. Darüber hinaus kann z. B. in der chemischen Industrie die Messwertbereitstellung zykluszeitverlängernd wirken, wenn eine Stoffzusammensetzung erst mittels Analysegeräten untersucht werden muss, bevor der Regler in der Lage ist, darauf zu reagieren. Schließlich kann auch das Stellglied selbst den zeitlichen Engpass darstellen, wenn nämlich aus Gründen einer andernfalls zu großen Wärmeverlustleistung die Stellgröße nur in bestimmten zeitlichen Abständen verändert werden darf. Pulsbreitenmoduliert betriebene Stellglieder, wie sie beispielsweise in der Leistungselektronik häufig vorkommen, sind hierfür typische Vertreter. All die genannten Gründe führen dazu, dass die Stellgrößen nur zu bestimmten Zeitpunkten verändert werden dürfen und anschließend bis zum nächsten Veränderungszeitpunkt konstant bleiben. Die Stellgrößen wirken somit zeitdiskret auf die Regelstrecke ein.

Um die mathematische Beschreibung der erläuterten Sachverhalte nicht zu kompliziert zu gestalten, soll nachfolgend die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten, in denen die Stellgrößen verändert werden können, konstant sein. Diese Zeit wird als Abtastzeit T bezeichnet. Der verwendete Begriff beschreibt bezüglich seiner Herkunft zwar eher den Umstand, dass die weiterverarbeiteten Messwerte aufgrund der Analog/Digital-Wandlung oder anderer begrenzender Elemente nur ein Abbild der zeitkontinuierlichen Messwerte und demzufolge abgetastete Werte sind. Der Begriff „Abtastzeit“ wird aber grundsätzlich verwendet, um den zeitlichen Abstand der zyklisch durchgeführten Signalverarbeitungsschritte zu beschreiben. Die Zeitpunkte, in denen die Messgrößen abgetastet bzw. in denen die Stellgrößen verändert werden, heißen dann konsequenterweise Abtastzeitpunkte. Sie werden mit der Laufvariablen $k \epsilon \mathbb{N}_0$, multipliziert mit der Abtastzeit T, gekennzeichnet.

An der Quelle der digitalen Signalverarbeitungskette, d. h. bei den Analog/Digital-Wandlern, werden sogenannte Sample-and-Hold-Stufen eingesetzt. Sie tasten die jeweiligen Messwerte, wie bereits erwähnt wurde, ab (sample) und halten die erfassten Werte mindestens so lange konstant (hold), bis die digitalisierten Werte festliegen. Ist das bis zur nächsten Abtastung der Fall, entspricht die Hold-Zeit der Abtastzeit. Zur Veranschaulichung zeigt das Bild 1.1 den beispielhaften Verlauf einer Messgröße y und den durch Abtastung erzeugten Verlauf, wenn die Abtastung in den mit Kreisen markierten Abtastzeitpunkten erfolgt. Der abgetastete Verlauf ist treppenförmig und dabei so zu interpretieren, dass sich der abgetastete Wert bis zur nächsten Abtastung nicht verändert und eine daraus erdachte, im Bild 1.1 mit $\bar{y}$ gekennzeichnete Zeitfunktion zwischen den Abtastzeitpunkten konstant ist.

Aus den abgetasteten Messwerten, den Sollwerten und evtl. vorliegenden Zwischengrößen erzeugt der Regelalgorithmus anschließend die Stellgrößenwerte, die über Digital/Analog-Wandler oder andere Stellgliedelemente der Regelstrecke zugeführt werden. An dieser Stelle ist nochmals eine Hold-Stufe bzw. ein sogenanntes Halteglied (H) zu modellieren, weil die erzeugte Stellgröße so lange auf die Strecke einwirkt, bis ein neuer Stellgrößenwert bereitgestellt wird, und hierzu zwischengespeichert werden muss. Im Fall eines Digital/-Analog-Wandlers für die Stellgrößenausgabe übernimmt dieser die Zwischenspeicherung selbst.

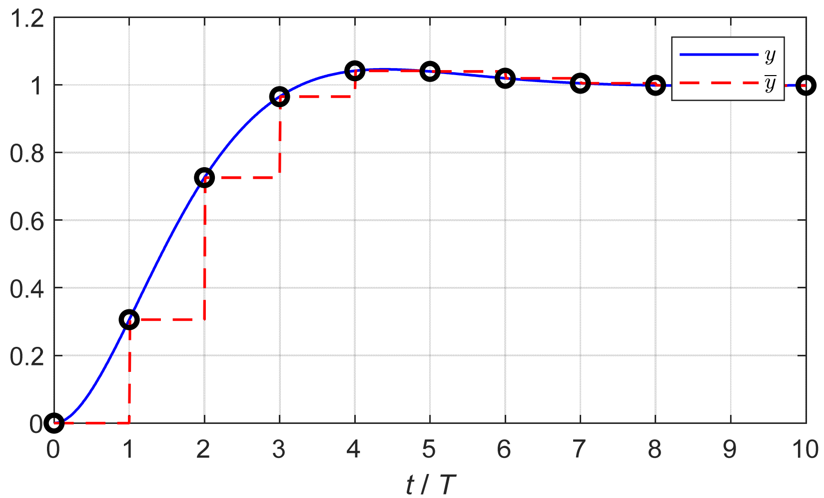

Bild 1.1: Beispielhafter zeitkontinuierlicher Messgrößenverlauf und daraus durch Abtastung erzeugtes Signal

Messgrößenabtastung (A/D), Regelalgorithmusabarbeitung und Stellgrößenausgabe laufen üblicherweise streng synchronisiert ab, damit keine Schwebungseffekte bzw. undeterministisch erscheinenden Störungen im Regelgrößenverlauf auftreten. Das Bild 1.2 zeigt die Grundstruktur des skizzierten digitalen Regelkreises mit den im Digitalteil enthaltenen

Komponenten für den Fall, dass die Stellgrößenvorgabe über Digital/Analog-Wandler (D/A) erfolgt.

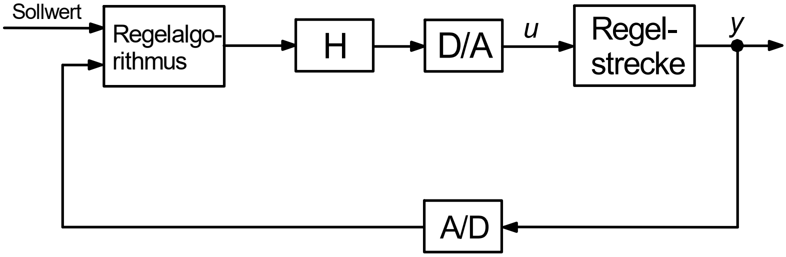

Bild 1.2: Grundstruktur eines digitalen Regelkreises für den Fall der Stellgrößenausgabe über Digital/Analog-Wandler

Obwohl Analog/Digital-Wandler, Regelalgorithmus und ggf. Digital/Analog-Wandler, Pulsbreitenmodulatoren oder andere Stellgliedvarianten unterschiedliche Signalverarbeitungszeiten aufweisen, gibt es nur eine einzige Zykluszeit, nach der alle genannten Signalumformungen repetierend abgearbeitet werden. Sie muss mindestens so groß sein, dass dies zuverlässig gelingt und währenddessen im Prozessor weniger priorisierte Aufgaben noch durchgeführt werden können. Die tatsächlich benötigte Zeitspanne von der Messgrößenabtastung bis zur Stellgrößenausgabe wird nachfolgend als Rechenzeit bezeichnet. Sie kann einen erheblichen Teil des sogenannten Abtastintervalls, d. h. der Zeitspanne zwischen zwei Abtastzeitpunkten, in Anspruch nehmen. Ist das der Fall, müssen in der Modellbildung und ggf. Signalverarbeitung besondere Maßnahmen ergriffen werden, um dies bei der Reglersynthese in angemessener Weise zu berücksichtigen (siehe Abschnitt 1.2.6). Ansonsten wird aus Aufwandsgründen angenommen, dass die Messgrößenabtastung und die Stellgrößenausgabe praktisch zum selben Zeitpunkt erfolgen.

Zur Kennzeichnung einer abgetasteten Messgröße wird diese mit

$$y_k \;=\; y(kT) \tag{1.1a}$$

bezeichnet, wenn $y(t)$ die zeitkontinuierlich verlaufende Messgröße und kT der Abtastzeitpunkt ist. Für die zum Zeitpunkt kT ausgegebene Stellgröße u wird

$$u_k \;=\; u(kT) \tag{1.1b}$$

geschrieben. Auf die gleiche Weise erfolgt die Notation für die Führungsgröße

$$w_k \;=\; w(kT)\,. \tag{1.1c}$$

Fasst man alle Abtastwerte der Mess- bzw. Regelgröße zusammen, so lässt sich das am einfachsten als Zahlenfolge (y_k) darstellen. Entsprechend wird die Zahlenfolge für die Führungsgröße mit (w_k) und für die Stellgröße mit (u_k) bezeichnet.

Eine mehr an der Regelungstechnik orientierte Darstellung der Struktur eines digitalen Regelkreises zeigt das Bild 1.3. Darin sind alle eine Speicherfunktion erfüllenden Hold-Elemente in einem einzigen Speicherglied zusammengefasst und dort mit SP bezeichnet. Das die Abtastung repräsentierende Übertragungsglied ist durch ABT gekennzeichnet. Oft werden auch beide als sogenanntes Abtast-Halte-Glied (AH-Glied) zusammengefasst. Darüber hinaus enthält das Bild 1.3 symbolisch typische Zeitverläufe für die jeweiligen Größen.

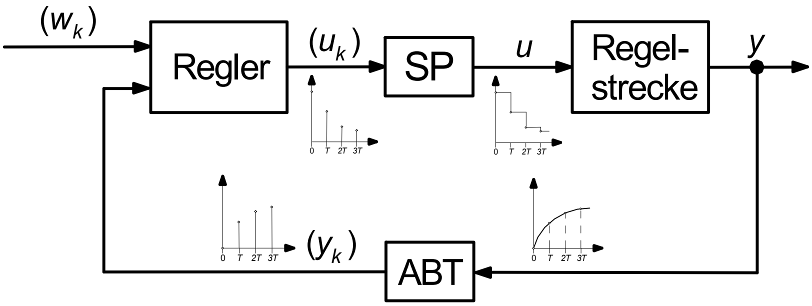

Bild 1.3: Abstrahierte Grundstruktur eines digitalen Regelkreises

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde, ohne es explizit zu erwähnen, davon ausgegangen, dass die Regelstrecke zeitkontinuierliches Verhalten aufweist und nur die Stellgröße zeitdiskret auf sie einwirkt. Es kann aber auch der Fall auftreten, dass die Regelstrecke nur in zeitdiskreter Form vorliegt, z. B. als Rechenmodell in einem Prozessor. Dann entfallen die bereits skizzierten sowie die nachfolgend noch zu beschreibenden Maßnahmen, um zeitkontinuierliche Signale abzutasten, zeitdiskrete Signale wieder in zeitkontinuierliche zurückzuverwandeln und ein zeitkontinuierliches Streckenmodell in ein zeitdiskretes zu transferieren.

1.2 Mathematische Beschreibung der zeitdiskreten Stellgrößeneinwirkung auf die Regelstrecke

1.2.1 Vorbetrachtungen und Einführung von Differenzengleichungen

Bei Regelstrecken, bei denen sich die Stellgrößen zu jedem beliebigen Zeitpunkt ändern können, sind Differenzialgleichungen die passenden Hilfsmittel zur mathematischen Beschreibung des dynamischen Streckenverhaltens. Ist die Regelstrecke darüber hinaus linear und zeitinvariant, empfiehlt sich bei Strecken geringer bis mittlerer Ordnung zwecks höherer Kompaktheit und besserer Übersichtlichkeit die Laplace-Transformation der modellierten Differenzialgleichungen. Können die Stellgrößen jedoch nur in den Abtastzeitpunkten verändert werden, sind Differenzialgleichungen ungeeignet, da sie beim Reglerentwurf nicht mehr erkennen lassen, dass eine zeitliche Beschränkung bei der Stellgrößenvorgabe vorliegt. Die erwünschte zeitliche Fixierung auf die Abtastzeitpunkte, in denen ja gerade die Stellgrößen verändert werden können, legt vielmehr die Verwendung von Differenzengleichungen nahe. Bei ihnen wird typischerweise von den Stell-, Mess-, Führungs- und Zwischengrößen des aktuellen und ggf. vergangenen Abtastzeitpunkts auf die betreffenden, im darauffolgenden Abtastzeitpunkt gültigen Werte extrapoliert. Handelt es sich um lineare, zeitinvariante Differenzengleichungen und beschreiben sie das dynamische Verhalten zwischen der Eingangsfolge (u_k) und der Ausgangsfolge (y_k), so weisen sie die grundsätzliche Gestalt

$$a_n\, y_{k+n} + a_{n-1}\, y_{k+n-1} + \dots + a_0\, y_k = b_m\, u_{k+m} + b_{m-1}\, u_{k+m-1} + \dots + b_0\, u_k \tag{1.2}$$

auf. Darin sind $a_0, \ldots, a_n$ und $b_0, \ldots, b_m$ noch zu bestimmende Koeffizienten, bei denen üblicherweise $m \leq n$, oft sogar $m < n$ gilt. Die ganze Zahl n wird als Ordnung der Differenzengleichung bezeichnet. Um sie eindeutig lösen zu können, werden wie bei Differenzialgleichungen Anfangswerte vorgegeben, und zwar in Form von n aufeinanderfolgenden Werten der Ausgangsgröße.

Stellt man Differenzengleichungen so dar, dass die Ausgangsgröße mit dem größten Zeitindex allein auf der linken Gleichungsseite steht, dann fällt es besonders leicht, von aktuellen und ggf. vergangenen Werten auf zukünftige zu schließen. Im vorliegenden Buch wird diese Notation daher häufig, aber nicht grundsätzlich verwendet. Darüber hinaus ist es ohne weiteres möglich, die Zeitindizes sämtlicher Eingangs-, Ausgangs- und ggf. Zwischengrößen um denselben Wert zu ändern, ohne dass sich dadurch das dynamische Verhalten ändert.

Regelgrößenverläufe, die bei zeitkontinuierlichen Strecken zwischen den Abtastzeitpunkten liegen, werden bei Differenzengleichungen ignoriert. Man geht diesbezüglich nicht davon aus, dass innerhalb der Abtastintervalle etwas Unerwartetes geschieht. Theoretisch ist das allerdings denkbar. So wird die im Bild 1.4 dargestellte Dauerschwingung $y(t)$ beispielsweise derart abgetastet – die Abtastzeitpunkte sind darin wieder mit Kreisen markiert –, dass sie im abgetasteten Signal $\bar{y}(t)$ nicht erkennbar ist.

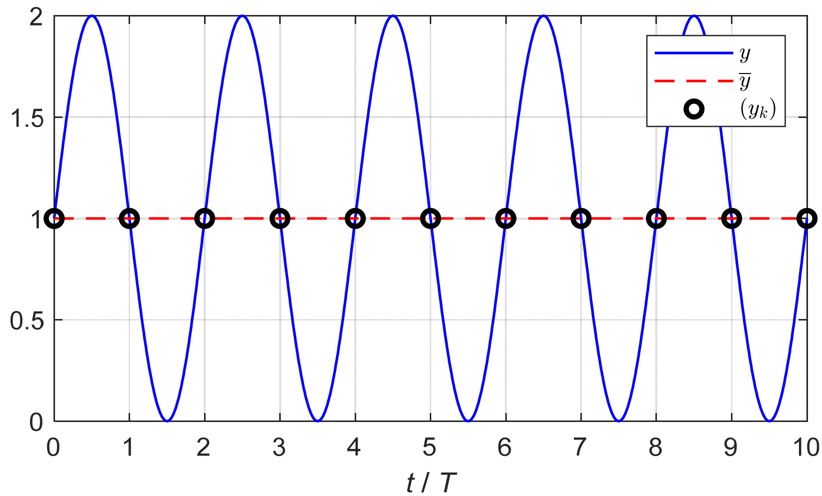

Bild 1.4: Beispielhafter zeitkontinuierlicher und abgetasteter Signalverlauf, bei dem das Shannon´sche Abtasttheorem verletzt ist

Wird jedoch das sogenannte Shannon´sche Abtasttheorem eingehalten, gemäß dem die Abtastzeit kleiner sein muss als die Hälfte des Kehrwerts der größten im abgetasteten Signal vorkommenden Frequenz, dann besteht die genannte Gefahr nicht [ISER88, UNBE07, SCHU13, LUNZ16b]. Dass das Shannon´sche Abtasttheorem – zumindest ansatzweise – erfüllt ist, wird nachfolgend stets vorausgesetzt.

Erwähnenswert ist im Zusammenhang mit den Betrachtungen zur Abtastung auch, dass durch höherfrequente Störungen in den Messsignalen niederfrequente Messsignalanteile vorgetäuscht werden können. Das Bild 1.5 zeigt diesen Effekt, der auch als Aliasing bezeichnet wird [SCHU13, LUNZ16b], beispielhaft.

Um das Aliasing zu verhindern bzw. zu reduzieren, müssen sogenannte Anti-Aliasing-Filter eingesetzt werden. Es handelt sich hierbei um eine üblicherweise zeitkontinuierlich arbeitende, hardwarebasierte Filterschaltung, die die höherfrequenten Störanteile aus dem Messsignal weitgehend ausfiltert [LUNZ16b].

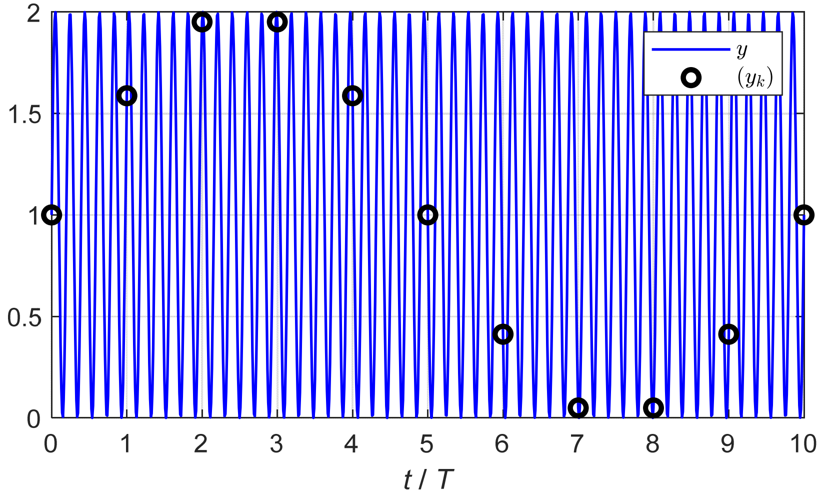

Bild 1.5: Beispielhafter Verlauf eines zeitkontinuierlichen Messsignals, dem eine höherfrequente Sinusschwingung als Störgröße überlagert ist, und der daraus durch Abtastung gewonnenen Messwertfolge mit niederfrequenten Störungen

Hinsichtlich der vorangegangenen Aussage, dass Differenzengleichungen ein probates Mittel für die Beschreibung des Einflusses zeitdiskret veränderlicher Stellgrößen auf die Regelstrecke seien, wird der Leser im Laufe des Abschnitts 1.2 allerdings erkennen, dass der Umgang mit Differenzengleichungen mit zunehmender Systemkomplexität immer unübersichtlicher wird, so dass die berechtigte Vermutung aufkommt, dass die Handhabung bzw. Erzeugung eines zeitdiskreten Regelstreckenmodells – zumindest für geringe bis mittlere Systemordnungen – effizienter im Bildbereich durchgeführt wird. Im Kapitel 2 wird die entsprechende Methode eingeführt. Aber selbst dann, wenn die Regelstreckenanalyse und der Reglerentwurf im Bildbereich stattfinden, ist es erforderlich, für elementare Übertragungsglieder deren Differenzengleichungen zu kennen. Die nachfolgenden Unterabschnitte widmen sich daher dieser Aufgabe.

1.2.2 Differenzengleichung eines Integrierglieds

Um zu verstehen, wie die zeitdiskrete Stellgrößenvorgabe eine zeitkontinuierlich beschriebene Regelstrecke beeinflusst, sollen zur Einführung in diese Thematik einige elementare Übertragungsglieder betrachtet und an ihnen die Stellgrößeneinwirkung analysiert werden.

Als erstes Übertragungsglied wird diesbezüglich ein Integrierglied herangezogen. Die Differenzialgleichung, die sein dynamisches Verhalten beschreibt, lautet

$$\dot{y} = K_{\mathrm{I}}\, u\,, \tag{1.3}$$

wobei y die Ausgangsgröße, u die Eingangsgröße und K_{I} den Integrierbeiwert des I-Glieds bezeichnet. Für die zugehörige s-Übertragungsfunktion gilt

$$G(s) = \frac{K_{\mathrm{I}}}{s}\,. \tag{1.4}$$

Integriert man Gl. (1.3) nach der Zeit, so erhält man die Lösung

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} K_{\mathrm{I}}\, u(t')\, \mathrm{d}t'\,, \tag{1.5}$$

wenn t_0 der Anfangszeitpunkt und $y(t_0)$ der zugehörige Anfangswert der Integriererausgangsgröße ist. Wird nun diese Lösung speziell auf die Zeitspanne zwischen zwei Abtastzeitpunkten angewandt und hierbei der Abtastzeitpunkt zu Beginn des betrachteten Abtastintervalls mit kT sowie der Abtastzeitpunkt am Ende des Abtastintervalls mit $kT + T = (k+1)T$ gekennzeichnet, so folgt aus Gl. (1.5) unter Beachtung der Annahme, dass die Stellgröße innerhalb eines Abtastintervalls konstant sei, das Resultat

$$y((k+1)T) = y(kT) + K_{\mathrm{I}}\, ((k+1)T - kT)\, u(kT)$$

bzw.

$$y_{k+1} = y_k + K_{\mathrm{I}}\, T\, u_k\,. \tag{1.6}$$

Gl. (1.6) ist die Differenzengleichung eines Integrierglieds. Sie beschreibt, wie sich die Integriererausgangsgröße y zwischen dem Beginn und dem Ende eines Abtastintervalls verändert, wenn auf den Integrierer während dieser Zeit die konstante Stellgröße u einwirkt. Hierbei wurde davon ausgegangen, dass die Stellgröße während des gesamten Abtastintervalls denjenigen Wert annimmt, der ihr im Abtastzeitpunkt zu Beginn des betrachteten Abtastintervalls zugewiesen wurde.

Um den zeitlichen Verlauf aller Abtastwerte der Integriererausgangsgröße zu ermitteln, kann Gl. (1.6) für jedes Abtastintervall ausgewertet werden. Hierbei stellt der berechnete Wert am Ende des *k*-ten Abtastintervalls zugleich den Startwert bei den Berechnungen für das *k*+1-te Abtastintervall dar. Liegt z. B. die Eingangsfolge $(u_k) = \left(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$ vor, dann folgt daraus durch sequenzielles Auswerten von Gl. (1.6) bei angenommenem verschwindenden Startwert $y_0 = 0$

$$\begin{array}{llll}
k = 0: & y_1 = y_0 + K_{\mathrm{I}}\, T\, u_0 & = 4\, K_{\mathrm{I}}\, T & \\
k = 1: & y_2 = y_1 + K_{\mathrm{I}}\, T\, u_1 & = 4\, K_{\mathrm{I}}\, T + 2\, K_{\mathrm{I}}\, T & = 6\, K_{\mathrm{I}}\, T \\
k = 2: & y_3 = y_2 + K_{\mathrm{I}}\, T\, u_2 & = 6\, K_{\mathrm{I}}\, T + K_{\mathrm{I}}\, T & = 7\, K_{\mathrm{I}}\, T \\
k = 3: & y_4 = y_3 + K_{\mathrm{I}}\, T\, u_3 & = 7\, K_{\mathrm{I}}\, T + \frac{1}{2}\, K_{\mathrm{I}}\, T & = \frac{15}{2}\, K_{\mathrm{I}}\, T \\
\vdots & \vdots & &
\end{array}$$

Natürlich können Differenzengleichungen auch eleganter gelöst werden als durch eine derartige iterative Vorgehensweise, beispielsweise durch einen Ansatz, der vergleichbar ist mit einem Exponentialansatz bei Differenzialgleichungen. Weil aber Differenzengleichungen nicht die Basis für die in den nächsten Kapiteln beschriebenen Analyse- und Synthesemethoden sein werden, unterbleibt hier die Erläuterung solcher Lösungswege.

Liegt das Integrierglied nicht in zeitkontinuierlicher Form vor, sondern nur zeitdiskret, z. B. als Rechenmodell, so lässt sich sein dynamisches Verhalten dennoch mit Hilfe der Differenzengleichung (1.6) beschreiben. Denn sie bringt die signifikante Eigenschaft eines Integrierers zum Ausdruck, seine Ausgangsgröße so lange zu verändern, bis das Eingangssignal verschwindet. Will man das auch bei einem rein zeitdiskret vorliegenden Modell erreichen, ist es auch dort angebracht, die Differenzengleichung (1.6) zu verwenden.

Da für die Veranschaulichung von dynamischen Zusammenhängen Strukturbilder in der Regel ein effizientes Hilfsmittel sind, soll auch für die Differenzengleichung des Integrierglieds das zugehörige Strukturbild angegeben werden. Es ist im Bild 1.6 dargestellt und beschreibt in seinem Kern die in Gl. (1.6) auftretende Summenbildung. Hinzu kommt noch der Übergang von y_{k+1} nach y_k, der in Form eines Totzeitglieds mit der Abtastzeit als Totzeit modelliert wurde. Das rührt daher, dass der in Gl. (1.6) links vom Gleichheitszeichen ermittelte Wert erst ein Abtastintervall später zum Istwert wird, sofern man davon ausgeht, dass y_k die aktuelle Integriererausgangsgröße bezeichnet. Weil nun aber eine Signalverzögerung bei unveränderter Signalform als Totzeit interpretierbar ist, liegt die Verwendung eines Totzeitglieds zur Darstellung des Übergangs von y_{k+1} nach y_k nahe.

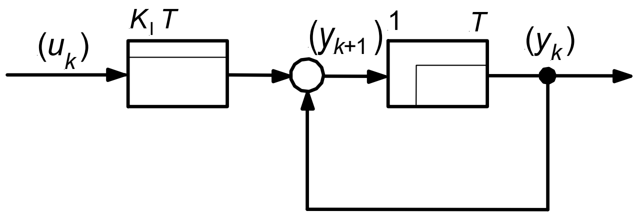

Bild 1.6: Zeitdiskretes Strukturbild eines Integrierglieds

1.2.3 Differenzengleichung eines P-T_1-Glieds

Ein weiteres elementares Übertragungsglied, für das die Einwirkung einer zeitdiskret veränderlichen Eingangsgröße untersucht werden soll, ist das P-T_1-Glied. Seine Differenzialgleichung lautet

$$y + \tau \dot{y} = K u , \tag{1.7}$$

wenn y die Ausgangsgröße und u die Eingangsgröße des P-T_1-Glieds sind sowie mit K der Verstärkungsfaktor und mit τ die Zeitkonstante des P-T_1-Glieds bezeichnet werden. Für die das P-T_1-Glied beschreibende s-Übertragungsfunktion erhält man

$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau s} . \tag{1.8}$$

Um die Differenzialgleichung (1.7) zu lösen, existieren mehrere Möglichkeiten. So liefert beispielsweise ein Exponentialansatz für die homogene Differenzialgleichung die mit y_h bezeichnete allgemeine Lösung

$$y_h(t) = c\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} ,$$