

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Summieren, Multiplizieren

Kommutativgesetz		Assoziativgesetz		
$a + b + c$	$a \cdot b \cdot c$	$a + b + c + d$	$a - b + c - d$	$a \cdot b \cdot c \cdot d$
$= a + c + b$	$= a \cdot c \cdot b$	$= a + (b + c + d)$	$= a - (b - c + d)$	$= a \cdot (b \cdot c \cdot d)$
$= b + c + a$	$= b \cdot c \cdot a$	$= (a + c) + (b + d)$	$= (a + c) - (b + d)$	$= (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)$

Regeln für das Rechnen mit Vorzeichen

$(+ a) + (+ b) = a + b$	$(+ a) - (- b) = a + b$	$(+ a) - (+ b) = a - b$	$(+ a) + (- b) = a - b$
$(+ a) \cdot (+ b) = + a \cdot b = ab$		$(+ a) \cdot (- b) = - a \cdot b = - ab$	
$(- a) \cdot (- b) = + a \cdot b = ab$		$(- a) \cdot (+ b) = - a \cdot b = - ab$	

Distributivgesetz

$a \cdot (c + d) = ac + ad$	$a \cdot (c - d) = ac - ad$	$a - bc - bd + be = a - b \cdot (c + d - e)$
$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$		$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd$		$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b) \cdot (c - d) = ac - ad + bc - bd$		$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

1.2 Rechnen mit Brüchen

Vorzeichenregeln

$\frac{+a}{+b} = + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$	$\frac{-a}{-b} = + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$	$\frac{-a}{+b} = - \frac{a}{b}$	$\frac{+a}{-b} = - \frac{a}{b}$
---	---	---------------------------------	---------------------------------

Rechenregeln

Kürzen mit k : $\frac{ak}{bk} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$	Erweitern mit n : $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{an}{bn}$	Summieren: $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$ $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$	$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$ $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-bc}{cd}$
Multiplizieren: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$	Dividieren: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b \cdot c} = \frac{a}{bc}$	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$

Wichtige Anwendungen:

$$\frac{ak + bk}{ck} = \frac{k(a+b)}{ck} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{b+c} + \frac{d}{e} = \frac{ae + (b+c) \cdot d}{(b+c) \cdot e}, \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{b \cdot c} \Rightarrow a = \frac{b \cdot c}{b+c}$$

1.3 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzen

- a Grundzahl (Basis)
- n Hochzahl (Exponent)
- c Potenzwert

$$a^n = c$$

$$c = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \Rightarrow a^n$$

Beispiel:
 $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a^0 = 1 \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad a^1 = a \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad 3^1 = 3 \quad 10^0 = 1$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad \frac{a^m}{b^m} = a^m \cdot b^{-m} \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Zahl	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
Zehnerpotenz	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6

Wurzeln

- a Wurzelwert
- n Wurzelexponent
- c Radikand

$$\sqrt[n]{c} = a$$

$$c = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \Rightarrow \sqrt[n]{c} = a$$

Beispiel:
 $\sqrt[2]{16} = \sqrt{4 \cdot 4} = 4$

$$\sqrt[n]{c \cdot d} = \sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[n]{d} \quad \sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}} \quad \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}} = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \sqrt[n]{c^m} = c^{\frac{m}{n}} \quad a^2 = c \Rightarrow a = \pm \sqrt{c}$$

Logarithmen

- n Logarithmus
- a Basis
- c Numerus

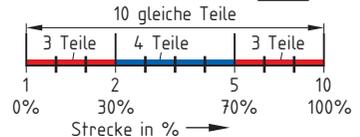
$$c = a^n \Rightarrow$$

$$\log_a c = n$$

Eingabemodus:
Taste **LOG**



- Zehnerlogarithmus (dekadischer Logarithmus): $\log_{10} c = \lg c$
Beispiel: $\lg 2 = 0,301\dots$
- Natürlicher Logarithmus ($e = 2,718\dots$): $\log_e c = \ln c$
Beispiel: $\ln 2 = 0,694\dots$
- Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus): $\log_2 c = \lg_2 c$
Beispiel: $\lg_2 2 = 1$



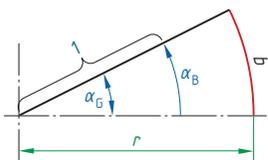
Logarithmische Teilung für die Werte 1, 2, 5 und 10

$$\log_a c + \log_a d = \log_a(c \cdot d) \quad \log_a c - \log_a d = \log_a\left(\frac{c}{d}\right) \quad -\log_a d = \log_a\left(\frac{1}{d}\right)$$

$$k \cdot \log_a c = \log_a(c^k) \quad \frac{1}{n} \cdot \log_a c = \log_a(\sqrt[n]{c}) \quad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_a c \cdot \log_b a$$

Zahl	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
Logarithmus (lg)	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

1.4 Winkel, Winkleinheiten, Umrechnung Bogenmaß ↔ Gradmaß



- α_B Winkel im Bogenmaß, Einheit Radiant (rad)
- α_G Winkel im Gradmaß, Einheit Grad (°)
- b Bogenlänge
- r Radius

$$\alpha_B = \frac{b}{r} \quad \text{rad} = \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1$$

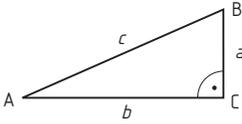
$$\alpha_B = \frac{\alpha_G}{180^\circ} \cdot \pi$$

$$\alpha_G = \frac{\alpha_B}{\pi} \cdot 180^\circ$$

Winkel α_G im Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel α_B im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6} = 0,52$	$\frac{\pi}{4} = 0,79$	$\frac{\pi}{3} = 1,05$	$\frac{\pi}{2} = 1,57$	$\pi = 3,14$	$\frac{3}{2} \cdot \pi = 4,71$	$2 \cdot \pi = 6,28$

1.5 Rechnen am Dreieck

Rechtwinkeliges Dreieck



c Hypotenuse

a Kathete

b Kathete

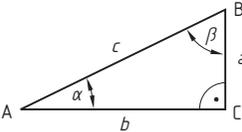
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Winkelfunktionen (Trigonometrische Funktionen)



c Hypotenuse

a Gegenkathete von α ,
Ankathete von β

b Gegenkathete von β ,
Ankathete von α

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

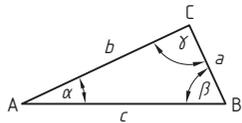
$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cot \beta = \frac{a}{b}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a}$$

Sinussatz, Kosinussatz



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Wichtige Winkelfunktionswerte

Funktion	Winkel α									
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	180°	270°	360°
Sinus α	0	0,259	0,500	0,707	0,866	0,966	1	0	-1	0
Cosinus α	1	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0	-1	0	1
Tangens α	0	0,268	0,577	1	1,732	3,732	∞	0	∞	0

1.6 Zahlensysteme, BCD-Code, Rechenregeln

Vergleich von Zahlensystemen:

Dezimalzahl	Dualzahl	Sedezimalzahl***
0	0	0
$1 = 2^0$	1	1
$2 = 2^1$	10	2
3	11	3
$4 = 2^2$	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
$8 = 2^3$	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F
$16 = 2^4$	10000	10

* Pseudotetrade, bewirkt Rückstellung und Übertrag auf die nächste Dekade.

** Korrektursummand beim Übertrag.

*** auch Hexadezimalzahl genannt.

BCD-(8-4-2-1) Code:

Dezimalzahl	8-4-2-1-Code	
0	0000	0000
1	0000	0001
2	0000	0010
3	0000	0011
4	0000	0100
5	0000	0101
6	0000	0110
7	0000	0111
8	0000	1000
9	0000	1001
*	0000	1010
**		+0110
10	0001	0000
11	0001	0001
12	0001	0010
13	0001	0011
14	0001	0100
15	0001	0101
16	0001	0110
17	0001	0111
18	0001	1000
19	0001	1001
*	0001	1010
**		+0110
20	0010	0000

Rechnen mit Dualzahlen:

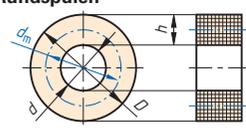
00	00
+ 0	- 0
00	00
01	01
+ 0	- 0
01	01
00	00
+ 1	- 1
01	- 01
01	01
+ 1	- 1
10	00
011	011
+ 10	- 10
101	001
011	011
+ 11	- 100
110	- 001

$1 \cdot 1 = 1$
$0 \cdot 0 = 0$
$1 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$
$0 : 1 = 0$
$1 : 1 = 1$

2 Längen- und Flächenberechnungen*

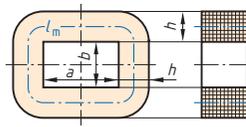
2.1 Drahtlängen von Rundspulen und von Rechteckspulen

Rundspulen



l	Drahtlänge	$h = \frac{D-d}{2}$	$l = \pi \cdot d_m \cdot N$
D, d	Durchmesser		
d_m	mittlerer Durchmesser	$d_m = d + h$	
h	Höhe (Wickelhöhe)	$d_m = D - h$	$d_m = \frac{D+d}{2}$
N	Windungszahl		

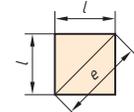
Rechteckspulen



l	Drahtlänge		$l = (2a + 2b + \pi \cdot h) \cdot N$
l_m	mittlere Windungslänge		
a	Länge		
b	Breite		
h	Wickelhöhe		
N	Windungszahl	$l = l_m \cdot N$	

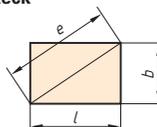
2.2 Flächen

Quadrat



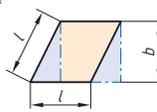
A	Fläche	$l = \sqrt{A}$	$A = l^2$
l	Seitenlänge		
u	Umfang	$e = \sqrt{2} \cdot l$	$u = 4 \cdot l$
e	Diagonale, Eckenmaß		

Rechteck



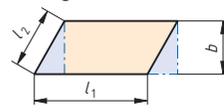
A	Fläche		$A = l \cdot b$
l	Länge		
b	Breite	$e = \sqrt{l^2 + b^2}$	
u	Umfang		$u = 2(l + b)$
e	Diagonale, Eckenmaß		

Raute



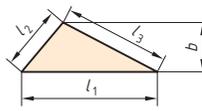
A	Fläche		$A = l \cdot b$
l	Länge		
b	Breite		
u	Umfang		$u = 4 \cdot l$

Parallelogramm



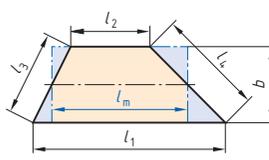
A	Fläche		$A = l_1 \cdot b$
l_1, l_2	Längen der Seiten		
b	Breite		
u	Umfang		$u = 2(l_1 + l_2)$

Dreieck



A	Fläche		$A = \frac{l_1 \cdot b}{2}$
l_1, l_2, l_3	Längen der Seiten		
b	Breite		
u	Umfang		$u = l_1 + l_2 + l_3$

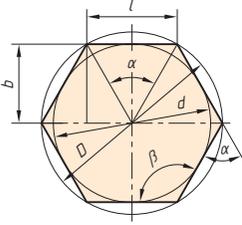
Trapez



A	Fläche		$A = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot b$
b	Breite		
l_1	große Länge	$A = l_m \cdot b$	
l_2	kleine Länge	$l_m = \frac{l_1 + l_2}{2}$	$u = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$
l_m	mittlere Länge		
l_3, l_4	Länge der Schrägseiten		$u = 2 \cdot l_m + l_3 + l_4$
u	Umfang		

* In manchen Ländern wird die Längeneinheit Inch (Zoll) verwendet, 1 Inch = 1 in = 1'' = 1 Zoll = 25,4 mm.

Regelmäßiges Vieleck



- A** Fläche
l Seitenlänge
b Breite eines Teildreiecks
n Eckenzahl
u Umfang
D Umkreisdurchmesser
d Inkreisdurchmesser
 α Mittelpunktswinkel
 β Eckenwinkel

$$b = \frac{1}{2} \cdot d$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha$$

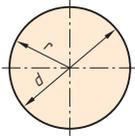
$$A = \frac{l \cdot b}{2} \cdot n$$

$$u = l \cdot n$$

$$l = D \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

Kreis



- A** Kreisfläche
d Durchmesser
r Radius, Halbmesser
u Umfang
 π Kreiszahl ($\pi = 3,1415\dots$)

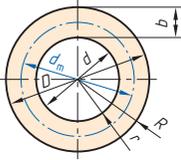
$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4};$$

$$A = \pi \cdot r^2$$

$$u = \pi \cdot d;$$

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Kreisring



- A** Kreisringfläche
D Außendurchmesser
d Innendurchmesser
 d_m mittlerer Durchmesser
R, r Radien
b Breite (Dicke)
 u_m mittlerer Kreisumfang (gestreckte Länge)

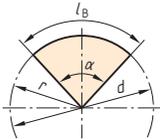
$$b = \frac{D-d}{2}$$

$$d_m = \frac{D+d}{2}$$

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

$$u_m = \pi \cdot d_m$$

Kreisausschnitt (Kreissektor)

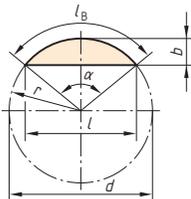


- A** Fläche des Kreisausschnitts
d Durchmesser
r Radius
 l_B Bogenlänge
 α Innenwinkel

$$A = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \alpha}{4 \cdot 360^\circ}; \quad A = \frac{r \cdot l_B}{2}$$

$$l_B = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}; \quad l_B = \frac{\pi \cdot d \cdot \alpha}{360^\circ}$$

Kreisabschnitt



- A** Fläche
r Radius
d Durchmesser
 l_B Bogenlänge
l Sehnenlänge
b Breite
 α Innenwinkel

$$l_B = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ}$$

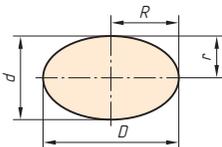
$$A = \frac{l_B \cdot r - l \cdot (r - b)}{2}$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{\alpha}{360} - \frac{l \cdot (r - b)}{2}$$

Näherungsformel:

$$A \approx \frac{2}{3} \cdot l \cdot b$$

Ellipse



- A** Fläche
d kleine Achse
D große Achse
r kleine Halbachse
R große Halbachse
u Umfang

$$A = \frac{\pi \cdot D \cdot d}{4};$$

$$A = \pi \cdot R \cdot r$$

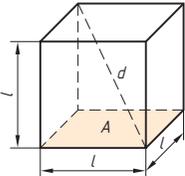
$$u \approx \pi \cdot \frac{D+d}{2};$$

$$u \approx \pi \cdot (R + r)$$

3 Körper-, Volumen- und Masseberechnungen

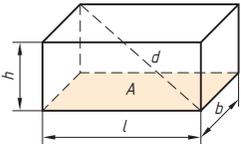
3.1 Volumen und Oberflächen

Würfel



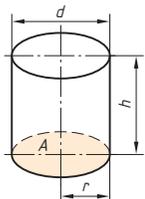
V	Volumen	$A = l^2$	$V = A \cdot l$; $V = l^3$
A	Grundfläche		$A_0 = 6 \cdot l^2$
l	Kantenlänge		$d = l \cdot \sqrt{3}$
A_0	Oberfläche		
d	Raumdiagonale		

Prisma



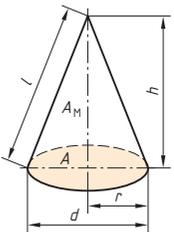
V	Volumen	$A = l \cdot b$	$V = A \cdot h$
A	Grundfläche		$V = l \cdot b \cdot h$
h	Höhe		$A_0 = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$
l	Länge		$d = \sqrt{l^2 + h^2 + b^2}$
b	Breite		
A_0	Oberfläche		
d	Raumdiagonale		

Zylinder



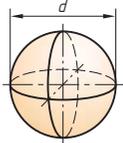
V	Volumen	$A = \pi \cdot r^2$	$V = A \cdot h$
A	Grundfläche		$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$
h	Höhe	$\pi = 3,1415 \dots$	
d	Durchmesser	$\frac{\pi}{4} = 0,785 \dots$	$A_0 = \pi \cdot d \cdot h + \frac{d^2 \cdot \pi}{2}$
r	Radius		
A_0	Oberfläche		

Kegel



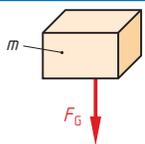
V	Volumen	$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$	$V = \frac{A \cdot h}{3}$
A	Grundfläche		$V = \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h$
A_M	Mantelfläche	$l = \sqrt{h^2 + r^2}$	$A_M = \pi \cdot r \cdot l$
A_0	Oberfläche	$A_0 = A_M + A$	$A_0 = \pi \cdot r \cdot (l + r)$
h	Höhe		
d	Durchmesser		
r	Radius		
l	Länge der Mantellinie		

Kugel



V	Volumen	$V = \frac{\pi \cdot d^3}{6}$
d	Durchmesser	
A_0	Oberfläche	

3.2 Masse und Gewichtskraft

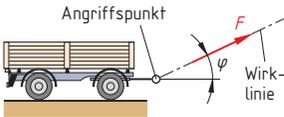


V	Volumen	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$; $[\text{m}] = \text{kg}$	$m = \rho \cdot V$
m	Masse		$1 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
ρ	Dichte	$[F_G] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$	$F_G = \rho \cdot V \cdot g$
F_G	Gewichtskraft		
g	Fallbeschleunigung (9,81 m/s ²)		

4 Mechanik

4.1 Kräfte

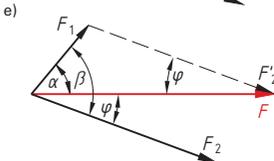
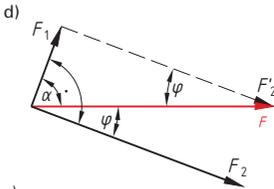
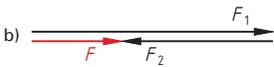
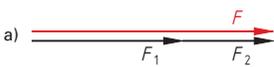
Einheit, Darstellung



Formelzeichen: F Einheit: $[F] = \text{N}$ Einheitenname: Newton

- Kräfte sind gerichtete Größen, die man als Pfeil darstellt.
- Der Betrag der Kraft $\hat{=}$ der Pfeillänge.
- Die Richtung der Kraft $\hat{=}$ der Pfeilrichtung.
- Man addiert Kräfte, indem man die Pfeile aneinanderfügt.
- Kräftemaßstab: z.B. 200 N $\hat{=}$ 10 mm

Zusammensetzen von zwei Kräften



F_1, F_2, \dots Teilkräfte, Komponenten

F Gesamtkraft, resultierende Kraft, Ersatzkraft

φ Winkel zwischen Teilkraft und Ersatzkraft

α Winkel zwischen den Teilkräften

β Winkel im Kräfteck
 $\beta = 180^\circ - \alpha$

i In den Formeln sind für F_1, F_2 und F Beträge einzusetzen.

Der Betrag einer Zahl ist ihr reiner Zahlenwert ohne Berücksichtigung des Vorzeichens. Z. B. der Betrag von $x = -5,3$ ist $|x| = 5,3$.

$|x|$ bedeutet: Betrag von x . Der Betrag ist immer positiv.

a) Teilkräfte gleichgerichtet:

$$F = F_1 + F_2$$

b) Teilkräfte entgegengerichtet:

$$F = F_1 - F_2$$

c) Gleichgewichtsbedingung:

$$F_1 - F_2 = 0$$

d) Teilkräfte senkrecht aufeinander:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

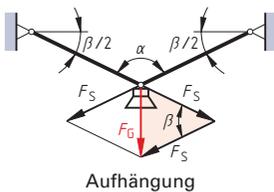
$$\frac{F_1}{F_2} = \tan \varphi; \quad F = \frac{F_1}{\sin \varphi}; \quad F = \frac{F_2}{\cos \varphi}$$

e) Teilkräfte nicht senkrecht aufeinander:

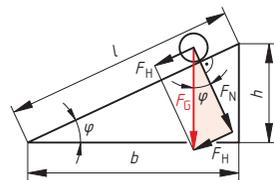
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \beta}$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{F_1}{F}$$

Zerlegen einer Kraft in zwei Teilkräfte (Komponenten)



Aufhängung



Schiefe Ebene

F_G Gewichtskraft

F_S Seilkräfte

α Winkel zwischen den Seilkräften

β Winkel im Kräfteck

F_H Hangabtriebskraft

F_N Normalkraft

l Länge der schiefen Ebene

b Basislänge der schiefen Ebene

h Höhenunterschied

φ Neigungswinkel der schiefen Ebene

$$\beta = 180^\circ - \alpha \quad F_S = \frac{F_G}{\sqrt{2 \cdot (1 - \cos \beta)}}$$

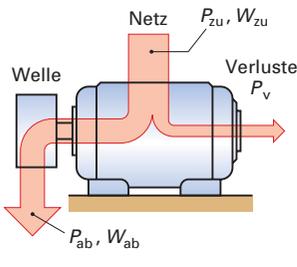
$$F_G = F_S \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \beta)}$$

$$\sin \varphi = \frac{h}{l} \quad F_H = F_G \cdot \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{b}{l} \quad F_N = F_G \cdot \cos \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{h}{b} \quad F_H = F_N \cdot \tan \varphi$$

4.2 Wirkungsgrad, Arbeitsgrad



* η griech. Kleinbuchstabe eta;
 ** ζ griech. Kleinbuchstabe zeta

- η^* Wirkungsgrad (Leistungsverhältnis)
- P_{zu} zugeführte Leistung (statt P_{zu} auch P_1)
- P_{ab} abgegebene Leistung (statt P_{ab} auch P_2)
- P_v Verlustleistung
- ζ^{**} Arbeitsgrad, Nutzungsgrad (Arbeits-, Energieverhältnis)
- W_{zu} zugeführte Energie
- W_{ab} abgegebene Energie
- η Gesamtwirkungsgrad
- η_1, η_2, \dots Einzelwirkungsgrade
- $[P] = W$ (Watt); $[W] = Ws$ (Wattsekunde)

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

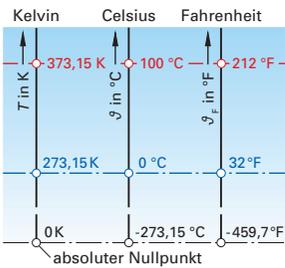
$$P_v = P_{zu} - P_{ab}$$

$$\zeta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}}$$

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \dots$$

5 Wärmelehre

5.1 Temperatur



- ϑ Temperatur in Grad Celsius [ϑ] = °C
- T Temperatur in Kelvin [T] = K
- $\Delta\vartheta, \Delta T$ Temperaturdifferenz in Kelvin [$\Delta\vartheta$] = [ΔT] = °C = K
- ϑ_F Temperatur in Grad Fahrenheit
- Absoluter Nullpunkt T_0 :**
 $T_0 = 0 \text{ K} \cong \vartheta_0 = -273,15 \text{ °C}$
- Eispunkt des Wassers T_1 :**
 $T_1 = 273,15 \text{ K} \cong \vartheta_1 = 0 \text{ °C}$

Temperatur in Kelvin:

$$T = \left(273,15 + \frac{\vartheta}{\text{°C}} \right) \text{ K}$$

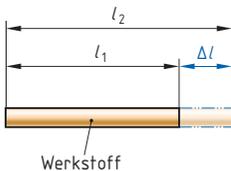
$$\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$$

$$\Delta T = T_2 - T_1$$

Temperatur in Fahrenheit:

$$\vartheta_F = 1,8 \cdot \vartheta + 32 \text{ °F}$$

5.2 Wärmedehnung



Werte für α_i : Seite 61

- $\Delta l, \Delta V$ Längen- bzw. Volumenänderung
- l_1, V_1 Länge bzw. Volumen in kaltem Zustand
- l_2, V_2 Länge bzw. Volumen in erwärmtem Zustand
- $\Delta\vartheta$ Temperaturdifferenz
- α_i Längenausdehnungskoeffizient
- γ Volumenausdehnungskoeffizient

$$\Delta l = \alpha_i \cdot l_1 \cdot \Delta\vartheta$$

$$\Delta V = \gamma \cdot V_1 \cdot \Delta\vartheta$$

$$l_2 = l_1 (1 + \alpha_i \cdot \Delta\vartheta)$$

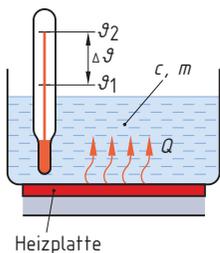
$$V_2 = V_1 (1 + \gamma \cdot \Delta\vartheta)$$

$$\gamma \approx 3 \cdot \alpha_i$$

$$[\alpha_i] = [\gamma] = \frac{1}{\text{°C}} = \frac{1}{\text{K}}$$

5.3 Wärmemenge

Wärmeaufnahme und Wärmeabgabe bei Temperaturänderung



- Q Wärme, Wärmemenge
- m Masse
- $\Delta\vartheta$ Temperaturdifferenz
- ϑ_1 Anfangstemperatur
- ϑ_2 Endtemperatur
- c spezifische Wärmekapazität
 (Wasser $c = \frac{4,187 \text{ kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$)
- C_{th} Wärmekapazität
- Weitere Werte für c : Seite 61
- Elektrowärme: Seite 17

$$\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$$

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta$$

$$C_{th} = c \cdot m$$

$$Q = C_{th} \cdot \Delta\vartheta$$

$$[c] = \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}; \quad [C_{th}] = \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

6 Elektrotechnische Grundlagen

6.1 Grundgesetze

Ohmsches Gesetz

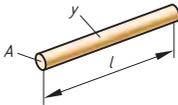


U Spannung
 I Stromstärke
 R Widerstand

$[U] = V$
 $[I] = A \quad 1 A = 1 \frac{V}{\Omega}$
 $[R] = \Omega$

$I = \frac{U}{R}$

Leiterwiderstand



R Leiterwiderstand
 A^* Leiterquerschnitt
 l Leiterlänge
 γ^* elektr. Leitfähigkeit
 ϱ spezifischer Widerstand

$[\gamma] = \frac{m}{\Omega \cdot mm^2}$
 $\gamma_{Cu} = 56 \frac{m}{\Omega \cdot mm^2}$
 $\gamma_{Al} = 36 \frac{m}{\Omega \cdot mm^2}$

$R = \frac{l}{\gamma \cdot A^*}; \quad R = \frac{\varrho \cdot l}{A}$

$l = R \cdot \gamma \cdot A$

$A = \frac{l}{\gamma \cdot R}$

$\gamma = \frac{1}{\varrho}$

* Nach DIN 1304 für:
 • Querschnitt auch S oder q ,
 • elektr. Leitfähigkeit auch σ oder χ .

$1 m\Omega = 0,001 \Omega = 1 \cdot 10^{-3} \Omega$
 $1 k\Omega = 1000 \Omega = 1 \cdot 10^3 \Omega$
 $1 M\Omega = 1000000 \Omega = 1 \cdot 10^6 \Omega$

$\varrho_{Cu} = 0,0178 \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$
 $\varrho_{Al} = 0,0278 \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$

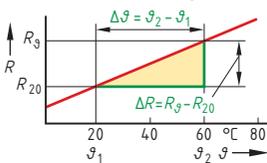
Widerstand und Leitwert

R Widerstand (Widerstandswert)
 G Leitwert

$[G] = \frac{1}{\Omega} = S$

$G = \frac{1}{R}$

Widerstand und Temperatur



Werte für α , γ und ϱ :
 Seite 61.

ΔR Widerstandsänderung
 R_ϑ Widerstand bei der Temperatur ϑ
 R_{20} Widerstand bei der Temperatur $20^\circ C$
 ϑ Temperatur
 ϑ_1 Anfangstemperatur
 ϑ_2 Endtemperatur
 $\Delta\vartheta$ Temperaturdifferenz
 α Temperaturkoeffizient (Temperaturbeiwert)

$[\Delta R] = \Omega$
 $[\Delta\vartheta] = K = ^\circ C$
 $\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$
 $\Delta R = R_\vartheta - R_{20}$
 $[\alpha] = \frac{1}{K} = \frac{1}{^\circ C}$

$\Delta R = \alpha \cdot R_{20} \cdot \Delta\vartheta$

$R_\vartheta = R_{20} + \Delta R$

$R_\vartheta = R_{20} (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$

$\Delta\vartheta = \frac{R_\vartheta - R_{20}}{\alpha \cdot R_{20}}$

Stromdichte

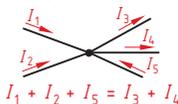
Strombelastbarkeit von isolierten Leitungen: Seite 62.
 *Nach DIN 1304: statt J auch S .

J^* Stromdichte
 I Stromstärke
 A Leiterquerschnitt

$[J] = \frac{A}{mm^2}$

$J = \frac{I}{A}$

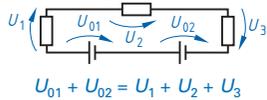
Knotenregel (1. Kirchhoff'sche Regel)



$\sum I_{zu}$ Summe der zufließenden Ströme
 $\sum I_{ab}$ Summe der abfließenden Ströme
 I_1, I_2, I_5 zufließende Ströme
 I_3, I_4 abfließende Ströme

$\sum I_{zu} = \sum I_{ab}$

Maschenregel (2. Kirchhoff'sche Regel)

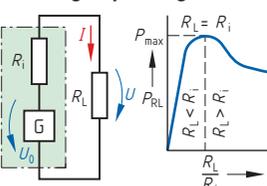


$\sum U_{erz}$ Summe der Erzeugerspannungen
 $\sum U_{verbr}$ Summe der Verbraucherspannungen
 U_{01}, U_{02} Erzeugerspannungen (U_{erz})
 U_1, U_2, U_3 Verbraucherspannungen (U_{verbr})

$\sum U_{erz} = \sum U_{verbr}$

6.2 Anpassung

Leistungsanpassung



R_L Lastwiderstand
 R_i Innenwiderstand
 U Lastspannung
 U_0 Leerlaufspannung, Quellenspannung
 I Laststrom
 I_k Kurzschlussstrom
 P_{max} größte Leistung an R_L

Leistungsanpassung:

$R_L = R_i$

$U = \frac{U_0}{2}$

$I = \frac{I_k}{2}$

$P_{max} = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{I_k}{2}$

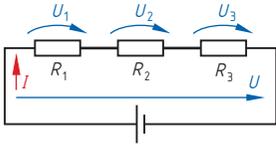
$P_{max} = \frac{U_0^2}{4 \cdot R_i}$

Stromanpassung: $R_L \ll R_i$

Spannungsanpassung: $R_L \gg R_i$

6.3 Schaltungen von Widerständen

Reihenschaltung von Widerständen



Durch in Reihe geschaltete Verbraucher fließt derselbe Strom I .

- R Ersatzwiderstand (Gesamtwiderstand)
- R_1, R_2, R_3 Einzelwiderstände
- U Gesamtspannung
- U_1, U_2, U_3 Teilspannungen, Verbraucherspannungen
- I Stromstärke
- n Anzahl gleicher Widerstände

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \dots$$

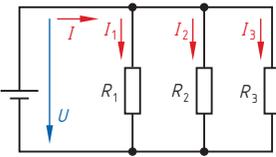
$$R = R_1 + R_2 + R_3 \dots$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R}$$

Für n -gleiche Widerstände:

$$R = n \cdot R_1$$

Parallelschaltung von Widerständen



An parallelgeschalteten Verbrauchern liegt dieselbe Spannung U .

- R Ersatzwiderstand
- R_1, R_2, R_3 Einzelwiderstände
- I Gesamtstrom
- I_1, I_2, I_3 Teilströme
- G Ersatzleitwert
- G_1, G_2, G_3 Einzelleitwerte
- n Anzahl gleicher Widerstände

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$$

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots$$

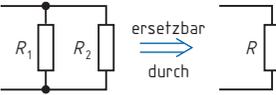
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \frac{I_1}{I_3} = \frac{R_3}{R_1}$$

Für n -gleiche Widerstände:

$$R = \frac{R_1}{n}$$

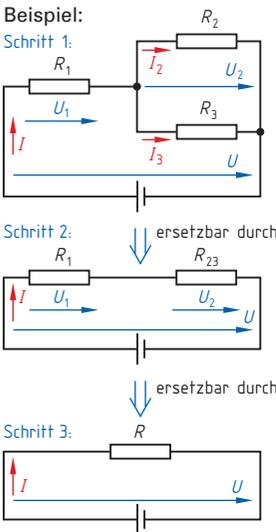
Parallelschaltung von zwei Widerständen



- R Ersatzwiderstand
- R_1, R_2 Einzelwiderstände parallel

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Gemischte Schaltungen (Gruppenschaltungen)



Gemischte Schaltungen sind Kombinationen aus Reihen- und Parallelschaltungen. Ermitteln der Ersatzwiderstände:

- Die Schaltung wird von innen nach außen aufgelöst.
- Reihen- und Parallelschaltungen werden Schritt für Schritt zu Ersatzwiderständen zusammengefasst.
- Die Schritte des Zusammenfassens werden wiederholt, bis nur noch ein Ersatzwiderstand vorliegt.

- R_1, R_2, R_3 Einzelwiderstände
- R_{23}, R Ersatzwiderstände
- U Gesamtspannung
- U_1, U_2 Teilspannungen
- I Gesamtstrom
- I_2, I_3 Teilströme

Berechnen des Ersatzwiderstandes vom Beispiel:

Schritt 1: Parallelschaltung R_{23} aus R_2 und R_3 :

$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

Schritt 2: Reihenschaltung R aus R_1 und R_{23} :

$$R = R_1 + R_{23}$$

Berechnen von Spannungen und Strömen:

$$U = R \cdot I$$

$$U_1 = R_1 \cdot I \quad U_2 = R_{23} \cdot I$$

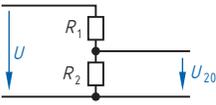
$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} \quad I_3 = \frac{U_2}{R_3}$$

$$I = I_2 + I_3$$



6.4 Spannungsteiler

Unbelasteter Spannungsteiler

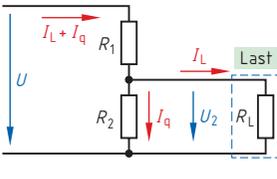


R_1, R_2 Teilwiderstände
 U Gesamtspannung
 U_{20} Teilspannung bei Leerlauf

$$U_{20} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U$$

$$R_1 = R_2 \left(\frac{U}{U_{20}} - 1 \right)$$

Belasteter Spannungsteiler



R_L Lastwiderstand
 R_1, R_2 Teilwiderstände
 R_{2L} Ersatzwiderstand aus R_2 u. R_L
 U Gesamtspannung
 U_2 Teilspannung bei Belastung
 I_L Laststrom
 U_{20} Teilspannung bei Leerlauf
 I_q Querstrom
 q Querstromverhältnis

$$U_2 = U \cdot \frac{R_{2L}}{R_1 + R_{2L}}$$

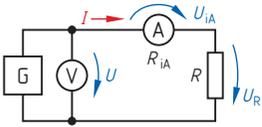
$$R_{2L} = \frac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L} \quad q = \frac{I_q}{I_L} = \frac{R_L}{R_2}$$

$$R_2 = R_L \cdot \frac{U}{U_2} \cdot \frac{U_{20} - U_2}{U - U_{20}}$$

$$R_1 = R_2 \cdot \left(\frac{U}{U_{20}} - 1 \right)$$

6.5 Widerstandsbestimmung

Spannungsfehlerschaltung (für große Widerstände)

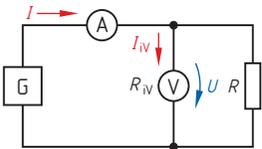


U angezeigte Spannung
 I angezeigte Stromstärke
 R_{iA} Innenwiderstand des Strommessers
 R zu bestimmender Widerstand
 U_{iA} Spannung am Strommesser

$$R = \frac{U}{I} - R_{iA}$$

$$R = \frac{U - U_{iA}}{I}$$

Stromfehlerschaltung (für kleine Widerstände)

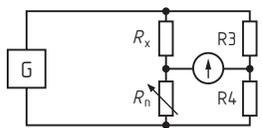


U angezeigte Spannung
 I angezeigte Stromstärke
 I_{iV} Strom durch den Spannungsmesser
 R zu bestimmender Widerstand
 R_{iV} Innenwiderstand des Spannungsmessers

$$R = \frac{U}{I - I_{iV}}$$

$$R = \frac{U}{I - \frac{U}{R_{iV}}}$$

Widerstandsmessbrücke



R_x unbekannter Widerstand
 R_n Vergleichswiderstand
 R_3, R_4 Brückenwiderstände

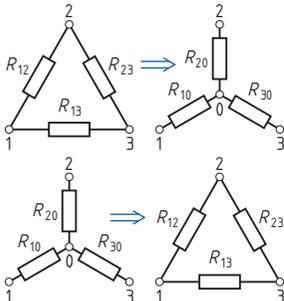
Abgleichbedingung:

$$\frac{R_x}{R_n} = \frac{R_3}{R_4}$$

$$R_x = R_n \cdot \frac{R_3}{R_4}$$

6.6 Unabgeglichene Brückenschaltung (Dreieck-Stern-Umwandlung)

Dreieck-Stern-Umwandlung



Widerstandsschaltungen, z. B. die Brückenschaltung, können durch eine Dreieck-Stern-Umwandlung (oder umgekehrt) in eine elektrisch gleichwertige Schaltung umgewandelt werden.

Dreieck in Stern:

Stern in Dreieck:

$$R_{10} = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$R_{12} = \frac{R_{10} \cdot R_{20}}{R_{30}} + R_{10} + R_{20}$$

$$R_{20} = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$R_{13} = \frac{R_{10} \cdot R_{30}}{R_{20}} + R_{10} + R_{30}$$

$$R_{30} = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

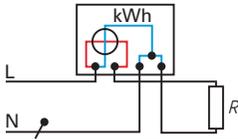
$$R_{23} = \frac{R_{20} \cdot R_{30}}{R_{10}} + R_{20} + R_{30}$$

R_{10}, R_{20}, R_{30} Widerstände der Sternschaltung

R_{12}, R_{13}, R_{23} Widerstände der Dreieckschaltung

6.7 Elektrische Arbeit und elektrische Leistung

Elektrische Arbeit



- W elektrische Arbeit
- U Spannung
- I Stromstärke
- t Zeit
- Q elektrische Ladung
- P elektrische Leistung

$$[W] = V \cdot A \cdot s = Ws = J$$

$$1 J = 1 Ws = 1 Nm$$

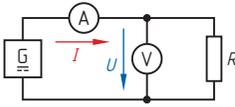
$$1 kWh = 1000 Wh = 3,6 \cdot 10^6 Ws = 3,6 MJ$$

$$W = U \cdot I \cdot t$$

$$W = P \cdot t$$

$$W = U \cdot Q$$

Elektrische Leistung bei Gleichstrom
(Gleichstromleistung)



Leistung bei Wechselstrom: Seite 25

- U Spannung
- I Stromstärke
- R Widerstand
- P elektrische Leistung
- W elektrische Arbeit

$$[P] = V \cdot A = VA = W = \frac{J}{s}$$

$$1 W = 1 \frac{Nm}{s} = 1 \frac{J}{s}$$

$$P = U \cdot I$$

$$P = \frac{W}{t}$$

$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$P = I^2 \cdot R$$

Leistungsbestimmung mit dem Elektrizitätszähler

- P elektrische Leistung
- C_Z Zählerkonstante
- n Umdrehungen der Zählerscheibe je Stunde

$$[P] = \frac{1}{\frac{1}{n}} = kW$$

$$P = \frac{n}{C_Z}$$

6.8 Kosten der elektrischen Arbeit (Arbeitspreis)



- K_A Arbeitspreis
- W elektrische Arbeit (Verbrauch elektr. Energie)
- T tariflicher Preis
- P elektrische Leistung
- t Zeit

$$[K_A] = \text{€}$$

$$[W] = kWh$$

$$[T] = \frac{\text{€}}{kWh}$$

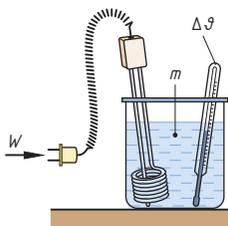
$$K_A = W \cdot T$$

$$K_A = P \cdot t \cdot T$$

Arbeitspreis (Verbrauchsentsgelt) = elektrische Arbeit x tariflicher Preis je kWh

6.9 Elektrowärme

Elektrische Arbeit und Wärme



Wärmenutzungsgrad

* nach DIN 1304 ζ (zeta)
(früher: Wärmewirkungsgrad η)
ζ griech. Kleinbuchstabe zeta

- Q_N Nutzwärme
- W elektr. Arbeit
- m Masse
- c spezifische Wärmekapazität (für Wasser: $c = 4,187 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$)
- $\Delta\vartheta$ Temperaturdifferenz
- ϑ Temperatur
- ϑ_1 Anfangstemperatur
- ϑ_2 Endtemperatur
- t Zeit
- P elektr. Leistung
- C_{th} Wärmekapazität
- ζ Wärmenutzungsgrad* (Energieverhältnis)
- Q_S Stromwärme

$$[Q] = \text{kg} \cdot \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \text{K} = \text{kJ}$$

$$[c] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$[C] = \frac{Ws}{\text{K}} = \frac{J}{\text{K}}$$

$$[P] = \frac{\text{kJ}}{\text{s}} = \text{kW}$$

$$Q_N = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta$$

$$C_{th} = \frac{Q_N}{\Delta\vartheta}$$

$$C_{th} = c \cdot m$$

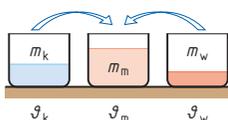
$$\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$$

$$W = \frac{Q_N}{\zeta}; W = Q_S = P \cdot t$$

$$P = \frac{m \cdot c \cdot \Delta\vartheta}{t \cdot \zeta}$$

$$\zeta = \frac{Q_N}{Q_S} = \frac{Q_N}{W}$$

Wassermischung



- m_k Kaltwassermenge
- m_w Warmwassermenge
- m_m Mischwassermenge
- ϑ_k Kaltwassertemperatur
- ϑ_w Warmwassertemperatur
- ϑ_m Mischwassertemperatur

$$m_m \cdot \vartheta_m = m_k \cdot \vartheta_k + m_w \cdot \vartheta_w$$

$$m_m = m_k + m_w$$

$$\vartheta_m = \frac{m_k \cdot \vartheta_k + m_w \cdot \vartheta_w}{m_k + m_w}$$