

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Summieren, Multiplizieren

Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a + b + c &= a + c + b = b + c + a \\ a \cdot b \cdot c &= a \cdot c \cdot b = b \cdot c \cdot a \end{aligned}$$

Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= a + (b + c + d) = (a + c) + (b + d) \\ a - b + c - d &= a - (b - c + d) = (a + c) - (b + d) \\ a \cdot b \cdot c \cdot d &= a \cdot (b \cdot c \cdot d) = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d) \end{aligned}$$

Regeln für das Rechnen mit Vorzeichen

$$\begin{aligned} (+a) + (+b) &= a + b & (+a) - (-b) &= a + b & (+a) - (+b) &= a - b & (+a) + (-b) &= a - b \\ (+a) \cdot (+b) &= +a \cdot b = ab & & & (+a) \cdot (-b) &= -a \cdot b = -ab \\ (-a) \cdot (-b) &= +a \cdot b = ab & & & (-a) \cdot (+b) &= -a \cdot b = -ab \end{aligned}$$

Distributivgesetz

$$\begin{aligned} a \cdot (c + d) &= ac + ad & a \cdot (c - d) &= ac - ad & a - bc - bd + be &= a - b \cdot (c + d - e) \\ (a + b) \cdot (c + d) &= ac + ad + bc + bd & (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b) \cdot (c - d) &= ac - ad - bc + bd & (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b) \cdot (c - d) &= ac - ad + bc - bd & (a + b) \cdot (a - b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

1.2 Rechnen mit Brüchen

Vorzeichenregeln

$$\begin{aligned} \frac{+a}{+b} &= +\frac{a}{b} = \frac{a}{b} & \frac{-a}{-b} &= +\frac{a}{b} = \frac{a}{b} & \frac{-a}{+b} &= -\frac{a}{b} & \frac{+a}{-b} &= -\frac{a}{b} \end{aligned}$$

Rechenregeln

Kürzen mit k :

$$\frac{ak}{bk} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$$

Erweitern mit n :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{an}{bn}$$

Summieren:

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$$

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-bc}{cd}$$

Multiplizieren:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

Dividieren:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b \cdot c} = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$$

Wichtige Anwendungen:

$$\frac{ak+bk}{ck} = \frac{k(a+b)}{ck} = \frac{a+b}{c}; \quad \frac{a}{b+c} + \frac{d}{e} = \frac{ae+(b+c) \cdot d}{(b+c) \cdot e}; \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{b \cdot c} \Rightarrow a = \frac{b \cdot c}{b+c}$$

1.3 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzen $a^n = c$

a Grundzahl (Basis)
 n Hochzahl (Exponent)
 c Potenzwert

$$c = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \Rightarrow a^n$$

$$\text{Bsp.: } 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

$$a^n = c$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad a^0 = 1; \quad 10^0 = 1; \quad a^1 = a; \quad a^{-1} = \frac{1}{a}; \quad 3^1 = 3; \quad 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad \frac{a^m}{b^m} = a^m \cdot b^{-m} \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Zahl	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
Zehnerpotenz	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6

Wurzeln $\sqrt[n]{c} = a$

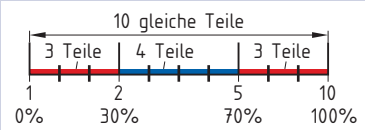
a Wurzelwert
 n Wurzelexponent
 c Radikand

$$c = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \Rightarrow \sqrt[n]{c} = a$$

$$\text{Bsp.: } \sqrt[4]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2$$

$$\sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{c \cdot d} = \sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[n]{d} \quad \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}} = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \sqrt[n]{c^m} = c^{\frac{m}{n}} \quad a^2 = c \Rightarrow a = \pm \sqrt{c}$$

Logarithmen

Logarithmische Teilung für die Werte 1, 2, 5 und 10

n Logarithmus a Basis
 c Numerus

Eingabemodus:
 Taste **LOG**



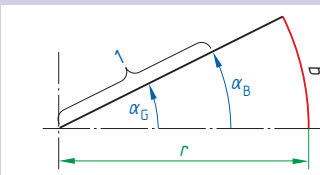
$$c = a^n \Rightarrow$$

$$\log_a c = n$$

- Zehnerlogarithmus (dekadischer Logarithmus): $\log_{10} c = \lg c$
 Beispiel: $\lg 2 = 0,301\dots$
- Natürlicher Logarithmus ($e = 2,718\dots$): $\log_e c = \ln c$
 Beispiel: $\ln 2 = 0,694\dots$
- Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus): $\log_2 c = \lg c$
 Beispiel: $\lg 2 = 1$

$$\log_a c + \log_a d = \log_a (c \cdot d) \quad \log_a c - \log_a d = \log_a \left(\frac{c}{d}\right) \quad -\log_a d = \log_a \left(\frac{1}{d}\right)$$

$$k \cdot \log_a c = \log_a (c^k) \quad \frac{1}{n} \cdot \log_a c = \log_a (\sqrt[n]{c}) \quad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_a c \cdot \log_b a$$

1.4 Winkel, Winkleinheiten, Umrechnung Bogenmaß $\rightleftharpoons$ Gradmaß

α_B Winkel im Bogenmaß,
 Einheit Radiant (rad)

α_G Winkel im Gradmaß,
 Einheit Grad ($^\circ$)

b Bogenlänge

r Radius

$$\alpha_B = \frac{b}{r} \quad \text{rad} = \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1$$

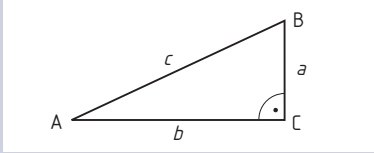
$$\alpha_B = \frac{\alpha_G}{180^\circ} \cdot \pi$$

$$\alpha_G = \frac{\alpha_B}{\pi} \cdot 180^\circ$$

Winkel α_G im Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel α_B im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6} = 0,52$	$\frac{\pi}{4} = 0,79$	$\frac{\pi}{3} = 1,05$	$\frac{\pi}{2} = 1,57$	$\pi = 3,14$	$\frac{3}{2} \cdot \pi = 4,71$	$2 \cdot \pi = 6,28$

1.5 Rechnen am Dreieck

Rechtwinkliges Dreieck



c Hypotenuse

a Kathete

b Kathete

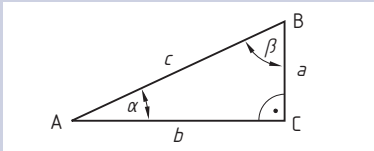
☞ Kennzeichen für rechten Winkel $\hat{=}$ 90°

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

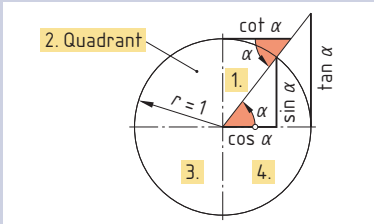
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Winkelfunktionen
(Trigonometrische Funktionen)

c Hypotenuse

a Gegenkathete zu α ,
Ankathete zu β b Gegenkathete zu β ,
Ankathete zu α

Einheitskreis



Quadrant	1	2	3	4
sin α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tan α	+	-	+	-
cot α	+	-	+	-

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow a = c \cdot \sin \alpha; \quad c = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow b = c \cdot \cos \alpha; \quad c = \frac{b}{\cos \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow a = b \cdot \tan \alpha; \quad b = \frac{a}{\tan \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow b = a \cdot \cot \alpha; \quad a = \frac{b}{\cot \alpha}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow b = c \cdot \sin \beta; \quad c = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow a = c \cdot \cos \beta; \quad c = \frac{a}{\cos \beta}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow b = a \cdot \tan \beta; \quad a = \frac{b}{\tan \beta}$$

$$\cot \beta = \frac{a}{b}$$

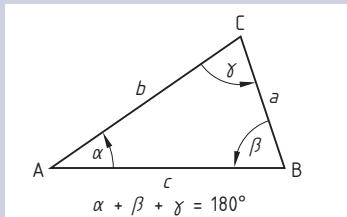
$$\Rightarrow a = b \cdot \cot \beta; \quad b = \frac{a}{\cot \beta}$$

Winkelberechnung, z.B. $\alpha = \arcsin \frac{a}{c}; \quad \beta = \arcsin \frac{b}{c}$

Wichtige Winkelfunktionswerte:

Funktion	Winkel α									
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	180°	270°	360°
Sinus α	0	0,259	0,500	0,707	0,866	0,966	1	0	-1	0
Cosinus α	1	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0	-1	0	1
Tangens α	0	0,268	0,577	1	1,732	3,732	∞	0	∞	0

Beispiel: $\sin 15^\circ = 0,259$

Sinussatz

i sin: Sinus
cos: Cosinus
tan: Tangens
cot: Cotangens

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}; \quad b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{b} \cdot \sin \beta; \quad \sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\Rightarrow b = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}; \quad c = b \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \cdot \sin \gamma; \quad \sin \gamma = \frac{c}{b} \cdot \sin \beta$$

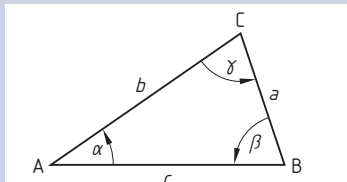
$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}; \quad a = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{a} \cdot \sin \alpha; \quad \sin \alpha = \frac{a}{c} \cdot \sin \gamma$$

Winkelbestimmung:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{b} \cdot \sin \beta\right); \quad \beta = \arcsin\left(\frac{b}{a} \cdot \sin \alpha\right)$$

Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \cos \alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot ac \cdot \cos \beta \quad \Rightarrow \cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos \gamma \quad \Rightarrow \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

1.6 Zahlensysteme, BCD-Code, Rechenregeln**Vergleich von Zahlensystemen:**

Dezimalzahl	Dualzahl	Sedezimalzahl***
0	0	0
$1 = 2^0$	1	1
$2 = 2^1$	10	2
3	11	3
$4 = 2^2$	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
$8 = 2^3$	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F
$16 = 2^4$	10000	10
17	10001	11
18	10010	12
19	10011	13
...	...	...
$32 = 2^5$	100000	20
...	...	...
$64 = 2^6$	1000000	40

8-4-2-1-Code (BCD-Code):

Dezimalzahl	8-4-2-1-Code	
0	0000	0000
1	0000	0001
2	0000	0010
3	0000	0011
4	0000	0100
5	0000	0101
6	0000	0110
7	0000	0111
8	0000	1000
9	0000	1001
*	0000	1010
**	*	+0110
10	0001	0000
11	0001	0001
12	0001	0010
13	0001	0011
14	0001	0100
15	0001	0101
16	0001	0110
17	0001	0111
18	0001	1000
19	0001	1001
*	0001	1010
**		+0110
20	0010	0000

Rechnen mit Dualzahlen:

+	00	-	00
	0		0
	00		00
+	01	-	01
	0		0
	01		01
+	00	-	00
	1		1
	01		01
+	01	-	01
	1		1
	10		00
+	011	-	011
	10		10
	101		001
+	011	-	011
	11		100
	110		001

$1 \cdot 1 = 1$
$0 \cdot 0 = 0$
$1 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$
$0 : 1 = 0$
$1 : 1 = 1$

* Pseudotetrade, bewirkt Rückstellung und Übertrag auf die nächste Dekade.

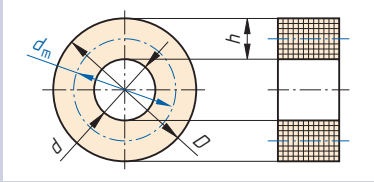
*** auch Hexadezimalzahl genannt.

** Korrektursummand beim Übertrag.

2 Längen- und Flächenberechnungen*

2.1 Drahtlängen von Rundspulen und von Rechteckspulen

Rundspulen



l Drahtlänge
 D, d Durchmesser
 d_m mittlerer Durchmesser
 h Höhe (Wickelhöhe)
 N Windungszahl

$$l = \pi \cdot d_m \cdot N \quad \Rightarrow N = \frac{l}{\pi \cdot d_m}$$

$$d_m = \frac{D + d}{2} \quad \Rightarrow D = 2 \cdot d_m - d$$

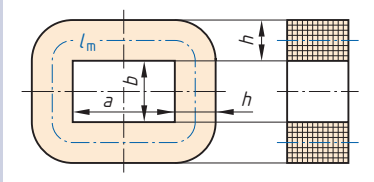
$$h = \frac{D - d}{2} \quad \Rightarrow D = 2 \cdot h + d;$$

$$d_m = d + h$$

$$d_m = D - h$$

$$d = D - 2 \cdot h$$

Rechteckspulen



l Drahtlänge
 b Breite

l_m mittlere Windungslänge
 h Wickelhöhe

a Länge
 N Windungszahl

* In manchen Ländern wird die Längeneinheit Inch (Zoll) verwendet, 1 Inch = 1 in = 1'' = 1 Zoll = 25,4 mm.

$$l = (2a + 2b + \pi \cdot h) \cdot N \quad \Rightarrow N = \frac{l}{2a + 2b + \pi \cdot h};$$

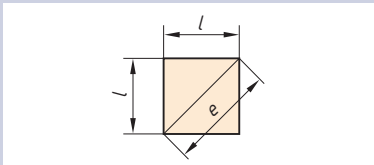
$$l = l_m \cdot N$$

$$\pi = 3,14159$$

$$h = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{l}{N} - 2a - 2b \right)$$

2.2 Flächen

Quadrat



A Fläche
 l Seitenlänge

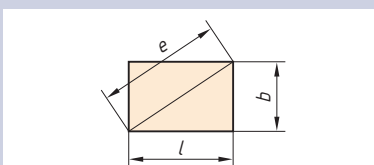
u Umfang
 e Diagonale, Eckenmaß

$$A = l^2 \quad \Rightarrow l = \sqrt{A}$$

$$u = 4 \cdot l \quad \Rightarrow l = \frac{u}{4}$$

$$e = \sqrt{2} \cdot l$$

Rechteck



A Fläche
 u Umfang

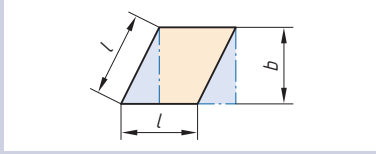
l Länge
 e Diagonale, Eckenmaß

b Breite

$$A = l \cdot b \quad \Rightarrow l = \frac{A}{b}$$

$$u = 2(l + b) \quad \Rightarrow l = \frac{u}{2} - b$$

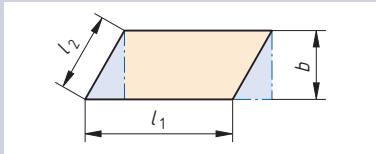
$$e = \sqrt{l^2 + b^2}$$

Raute

A Fläche
 l Länge
 b Breite
 u Umfang

$$A = l \cdot b \quad \Rightarrow l = \frac{A}{b}$$

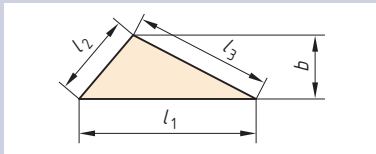
$$u = 4 \cdot l \quad \Rightarrow l = \frac{u}{4}$$

Parallelogramm

A Fläche
 l_1, l_2 Längen der Seiten
 b Breite
 u Umfang

$$A = l_1 \cdot b \quad \Rightarrow l_1 = \frac{A}{b}; \quad b = \frac{A}{l_1}$$

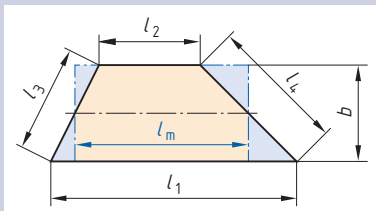
$$u = 2(l_1 + l_2) \quad \Rightarrow l_1 = \frac{u}{2} - l_2; \quad l_2 = \frac{u}{2} - l_1$$

Dreieck

A Fläche
 l_1, l_2, l_3 Längen der Seiten
 b Breite
 u Umfang

$$A = \frac{l_1 \cdot b}{2} \quad \Rightarrow b = \frac{2 \cdot A}{l_1}; \quad l_1 = \frac{2 \cdot A}{b}$$

$$u = l_1 + l_2 + l_3 \quad \Rightarrow l_1 = u - l_2 - l_3$$

Trapez

A Fläche
 b Breite
 l_1 große Länge
 l_2 kleine Länge
 l_m mittlere Länge
 l_3, l_4 Längen der Schrägseiten
 u Umfang

$$A = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot b \quad \Rightarrow l_1 = \frac{2 \cdot A}{b} - l_2$$

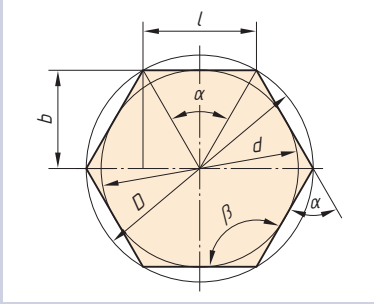
$$u = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \quad \Rightarrow l_1 = u - l_2 - l_3 - l_4$$

$$u = 2 \cdot l_m + l_3 + l_4 \quad \Rightarrow l_m = \frac{u - l_3 - l_4}{2}$$

$$A = l_m \cdot b \quad \Rightarrow l_m = \frac{A}{b}; \quad b = \frac{A}{l_m}$$

$$l_m = \frac{l_1 + l_2}{2} \quad \Rightarrow l_1 = 2 \cdot l_m - l_2; \quad l_2 = 2 \cdot l_m - l_1$$

Regelmäßiges Vieleck



- A** Fläche
l Seitenlänge
b Breite eines Teildreiecks
n Eckenzahl
u Umfang
D Umkreisdurchmesser
d Inkreisdurchmesser
 α Mittelpunktswinkel
 β Eckenwinkel

$$A = \frac{l \cdot b}{2} \cdot n \quad \Rightarrow n = \frac{2 \cdot A}{l \cdot b}; \quad l = \frac{2 \cdot A}{b \cdot n}$$

$$u = l \cdot n \quad \Rightarrow l = \frac{u}{n}; \quad n = \frac{u}{l}$$

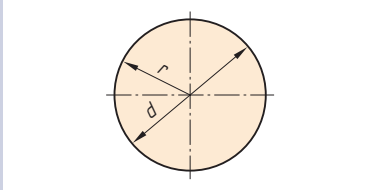
$$l = D \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow D = \frac{l}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \quad \Rightarrow n = \frac{360^\circ}{\alpha}$$

$$b = \frac{1}{2} \cdot d \quad \Rightarrow d = 2 \cdot b$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha \quad \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \beta$$

Kreis



- A** Kreisfläche
d Durchmesser
r Radius, Halbmesser
u Umfang
 π Kreiszahl ($\pi = 3,1415\dots$)

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}; \quad \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}}$$

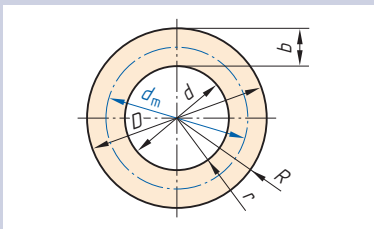
$$A = \pi \cdot r^2 \quad \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

$$u = \pi \cdot d; \quad \Rightarrow d = \frac{u}{\pi}$$

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r \quad \Rightarrow r = \frac{u}{2 \cdot \pi} = \frac{d}{2}$$

$$[d] = [u] = \text{m} \rightarrow [A] = \text{m}^2; \quad [d] = [u] = \text{mm} \rightarrow [A] = \text{mm}^2$$

Kreising



- A** Kreisingfläche
D Außendurchmesser
d Innendurchmesser
 d_m mittlerer Durchmesser
R, r Radien
b Breite (Dicke)
 u_m mittlerer Kreisumfang (gestreckte Länge)

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \quad \Rightarrow D = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi} + d^2};$$

$$d = \sqrt{D^2 - \frac{4 \cdot A}{\pi}}$$

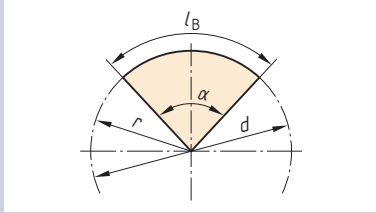
$$u_m = \pi \cdot d_m \quad \Rightarrow d_m = \frac{u_m}{\pi}$$

$$b = \frac{D - d}{2} \quad \Rightarrow D = 2 \cdot b + d; \quad d = D - 2 \cdot b$$

$$d_m = \frac{D + d}{2} \quad \Rightarrow D = 2 \cdot d_m - d;$$

$$d = 2 \cdot d_m - D$$

$$\pi = 3,14159$$

Kreisausschnitt (Kreissektor)

- A** Fläche des Kreisausschnitts
d Durchmesser
r Radius
 l_B Bogenlänge
 α Innenwinkel

$$A = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \alpha}{4 \cdot 360^\circ};$$

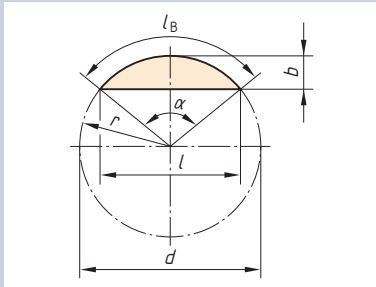
$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot A \cdot 360^\circ}{\pi \cdot \alpha}};$$

$$A = \frac{r \cdot l_B}{2}$$

$$\alpha = \frac{4 \cdot A \cdot 360^\circ}{\pi \cdot d^2}$$

$$l_B = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$$

$$\Rightarrow r = \frac{l_B \cdot 180^\circ}{\pi \cdot \alpha}$$

Kreisabschnitt

- A** Fläche
r Radius
d Durchmesser
 l_B Bogenlänge
 l Sehnenlänge
b Breite
 α Innenwinkel

$$l_B = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ}$$

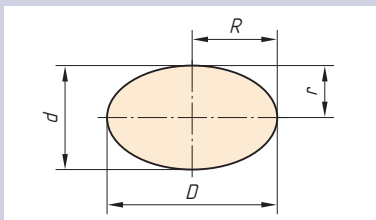
$$A = \frac{l_B \cdot r - l(r - b)}{2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2 \cdot A - r \cdot b}{l_B - l};$$

$$l_B = \frac{2 \cdot A + l(r - b)}{r}$$

Näherungsformel:

$$A \approx \frac{2}{3} \cdot l \cdot b$$

Ellipse

- A** Fläche
d kleine Achse
D große Achse
r kleine Halbachse
R große Halbachse
u Umfang

$$A = \frac{\pi \cdot D \cdot d}{4};$$

$$\Rightarrow D = \frac{4 \cdot A}{\pi \cdot d}; \quad d = \frac{4 \cdot A}{\pi \cdot D}$$

$$A = \pi \cdot R \cdot r$$

$$\Rightarrow R = \frac{A}{\pi \cdot r}; \quad r = \frac{A}{\pi \cdot R}$$

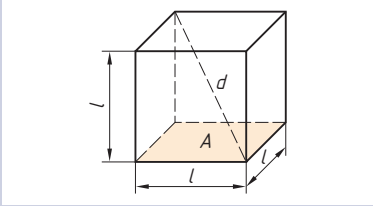
$$u \approx \frac{D + d}{2};$$

$$u \approx \pi \cdot (R + r)$$

3 Körper-, Volumen- und Masseberechnungen

3.1 Volumen und Oberflächen

Würfel



V Volumen
 A Grundfläche
 l Kantenlänge
 A_0 Oberfläche
 d Raumdiagonale

$$V = A \cdot l$$

$$\Rightarrow A = \frac{V}{l}; \quad l = \frac{V}{A}$$

$$V = l^3$$

$$\Rightarrow l = \sqrt[3]{V} = V^{\frac{1}{3}}$$

$$A_0 = 6 \cdot l^2$$

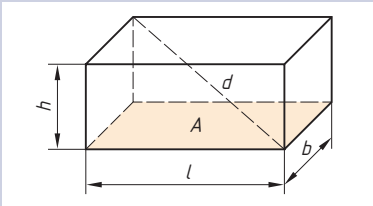
$$\Rightarrow l = \sqrt{\frac{A_0}{6}}$$

$$d = l \cdot \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow l = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

$$A = l^2$$

Prisma



V Volumen
 A Grundfläche
 h Höhe
 l Länge
 b Breite
 A_0 Oberfläche
 d Raumdiagonale

$$V = A \cdot h$$

$$\Rightarrow A = \frac{V}{h}; \quad h = \frac{V}{A}$$

$$V = l \cdot b \cdot h$$

$$\Rightarrow l = \frac{V}{b \cdot h}; \quad b = \frac{V}{l \cdot h};$$

$$h = \frac{V}{l \cdot b}$$

$$A_0 = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$$

$$d = \sqrt{l^2 + h^2 + b^2}$$

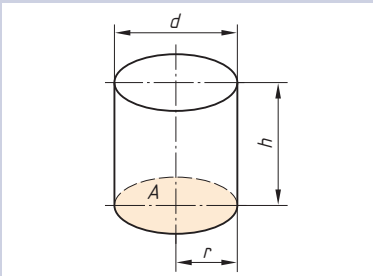
$$\Rightarrow h = \sqrt{d^2 - l^2 - b^2}$$

$$l = \sqrt{d^2 - h^2 - b^2}$$

$$A = l \cdot b$$

$$b = \sqrt{d^2 - l^2 - h^2}$$

Zylinder



V Volumen
 A Grundfläche
 h Höhe
 d Durchmesser
 r Radius
 A_0 Oberfläche

$$V = A \cdot h$$

$$\Rightarrow h = \frac{V}{A}; \quad A = \frac{V}{h}$$

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h$$

$$\Rightarrow h = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2}; \quad d = \sqrt{\frac{4 \cdot V}{\pi \cdot h}}$$

$$A_0 = \pi \cdot d \cdot h + \frac{\pi \cdot d^2}{2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{A_0}{\pi \cdot d} - \frac{d}{2}$$

$$A = \pi \cdot r^2$$

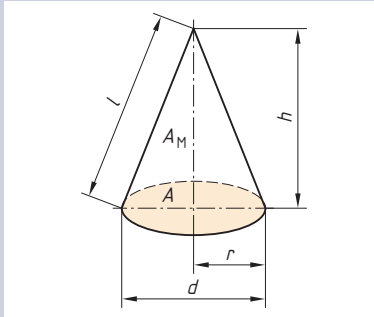
$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot V}{\pi \cdot h}}$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot (A_0 - \pi \cdot d)}{\pi}}$$

$$\pi = 3,1415 \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = 0,785 \dots$$

Kegel

- V Volumen
 A Grundfläche
 A_M Mantelfläche
 A_0 Oberfläche
 h Höhe
 d Durchmesser
 r Radius
 l Länge der Mantellinie

$$V = \frac{A \cdot h}{3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3 \cdot V}{h}; \quad h = \frac{3 \cdot V}{A}$$

$$V = \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{12 \cdot V}{\pi \cdot h}}; \quad h = \frac{12 \cdot V}{\pi \cdot d^2}$$

$$A_M = \pi \cdot r \cdot l$$

$$\Rightarrow r = \frac{A_M}{\pi \cdot l}; \quad l = \frac{A_M}{\pi \cdot r}$$

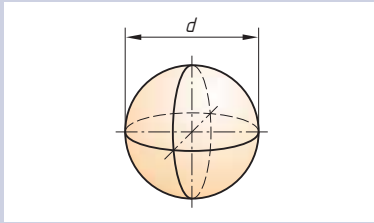
$$A_0 = \pi \cdot (l \cdot r + r^2)$$

$$\Rightarrow l = \frac{A_0}{\pi \cdot r} - r$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \pi \cdot r^2$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$A_0 = A_M + A$$

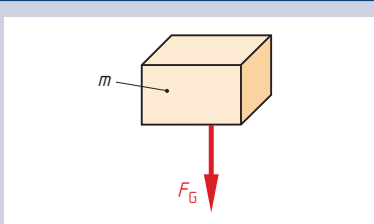
Kugel

$$V = \frac{\pi \cdot d^3}{6}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot V}{\pi}}$$

$$A_0 = \pi \cdot d^2$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$$

 V Volumen d Durchmesser A_0 Oberfläche**3.2 Masse und Gewichtskraft**

- V Volumen
 m Masse
 ρ Dichte
 F_G Gewichtskraft
 g Fallbeschleunigung (9,81 m/s²)



Weitere Werte für Dichte ρ :
Seite 121

$$m = \rho \cdot V$$

$$\Rightarrow V = \frac{m}{\rho}; \quad \rho = \frac{m}{V}$$

$$F_G = m \cdot g$$

$$F_G = \rho \cdot V \cdot g$$

$$\Rightarrow V = \frac{F_G}{\rho \cdot g}; \quad \rho = \frac{F_G}{V \cdot g}$$

$$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}; \quad [m] = \text{kg}$$

$$[F_G] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$$

$$1 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3};$$

$$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg (t für Tonne)}$$

Dichte ρ (Beispiele)

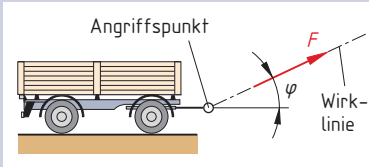
Wasser bei 4 °C	1 kg/dm ³
Aluminium	2,7 kg/dm ³
Kupfer	8,9 kg/dm ³



4 Mechanik

4.1 Kräfte

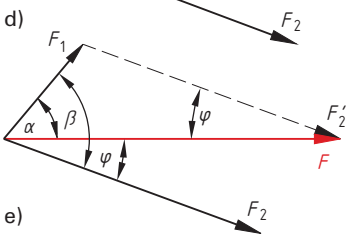
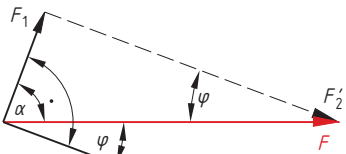
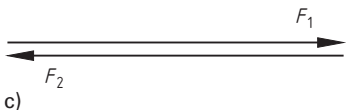
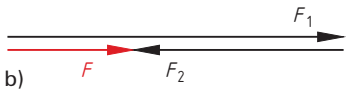
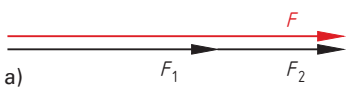
Einheit, Darstellung



Formelzeichen: F ; Einheit: $[F] = \text{N}$; Einheitenname: Newton
Kräftemaßstab: z. B. $200 \text{ N} \triangleq 10 \text{ mm}$

- Kräfte sind gerichtete Größen, die man als Pfeil darstellt.
- Der Betrag der Kraft $\triangleq$ der Pfeillänge.
- Die Richtung der Kraft $\triangleq$ der Pfeilrichtung.
- Man addiert Kräfte, indem man die Pfeile aneinanderfügt.
- Kräftemaßstab: z. B. $200 \text{ N} \triangleq 10 \text{ mm}$

Zusammensetzen von zwei Kräften



$F_1, F_2, \dots$ Teilkräfte, Komponenten

F Gesamtkraft, resultierende Kraft, Ersatzkraft

φ Winkel zwischen Teilkraft und Ersatzkraft

α Winkel zwischen den Teilkräften

β Winkel im Kräfteck $\beta = 180^\circ - \alpha - \varphi$



In den Formeln sind für F_1, F_2 und F Beträge einzusetzen.



arccos, Eingabemodus:

2nd cos

a) Teilkräfte gleichgerichtet:

$$F = F_1 + F_2 \quad \Rightarrow F_1 = F - F_2; \quad F_2 = F - F_1$$

b) Teilkräfte entgegengerichtet:

$$F = F_1 - F_2 \quad \Rightarrow F_1 = F + F_2; \quad F_2 = F_1 - F$$

c) Gleichgewichtsbedingung:

$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow F_1 - F_2 = 0$$

d) Teilkräfte senkrecht aufeinander:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad \Rightarrow F_1 = \sqrt{F^2 - F_2^2}; \quad F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2}$$

$$F = \frac{F_1}{\cos \alpha} \quad \Rightarrow F_1 = F \cdot \cos \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{F_1}{F}$$

$$F = \frac{F_2}{\cos \varphi} \quad \Rightarrow F_2 = F \cdot \cos \varphi; \quad \cos \varphi = \frac{F_2}{F}$$

e) Teilkräfte nicht senkrecht aufeinander:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \beta}$$

$$\Rightarrow \beta = \arccos \left(\frac{F_1^2 + F_2^2 - F^2}{2 \cdot F_1 \cdot F_2} \right)$$

$$F_1 = \sqrt{F^2 + F_2^2 - 2 \cdot F \cdot F_2 \cdot \cos \varphi}$$

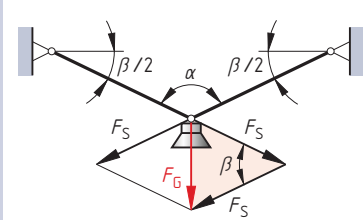
$$\Rightarrow \varphi = \arccos \left(\frac{F^2 + F_2^2 - F_1^2}{2 \cdot F \cdot F_2} \right)$$

$$F_2 = \sqrt{F^2 + F_1^2 - 2 \cdot F \cdot F_1 \cdot \cos \alpha}$$

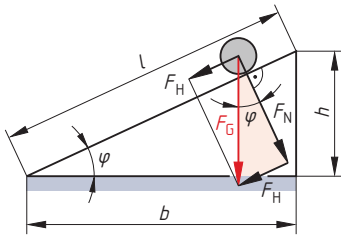
$$\Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{F^2 + F_1^2 - F_2^2}{2 \cdot F \cdot F_1} \right)$$



Zerlegen einer Kraft in zwei Teilkraften (Komponenten)



Aufhängung



Schiefe Ebene

$$\beta = 180^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = 180^\circ - \beta$$

$$F_S = \frac{F_G}{\sqrt{2 \cdot (1 - \cos \beta)}}$$

$$\Rightarrow F_G = F_S \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \beta)}$$

$$\cos \beta = 1 - \frac{F_G^2}{2 \cdot F_S^2}$$

$$F_H = F_G \cdot \sin \varphi$$

$$\Rightarrow F_G = \frac{F_H}{\sin \varphi}$$

$$\sin \varphi = \frac{h}{l}$$

$$F_H = F_G \cdot \frac{h}{l}; \quad F_G = \frac{F_H \cdot l}{h}$$

$$F_N = F_G \cdot \cos \varphi$$

$$\Rightarrow F_G = \frac{F_N}{\cos \varphi}$$

$$\cos \varphi = \frac{b}{l}$$

$$F_N = F_G \cdot \frac{b}{l}; \quad F_G = \frac{F_N \cdot l}{b}$$

$$F_H = F_N \cdot \tan \varphi$$

$$\Rightarrow F_N = \frac{F_H}{\tan \varphi}; \quad \tan \varphi = \frac{F_H}{F_N}$$

$$\tan \varphi = \frac{h}{b}$$

$$F_H = F_N \cdot \frac{h}{b}; \quad F_N = \frac{F_H \cdot b}{h}$$

F_G Gewichtskraft

F_S Seilkräfte

α Winkel zwischen den Seilkräften

β Winkel im Krafteck

F_H Hangabtriebskraft

F_N Normalkraft

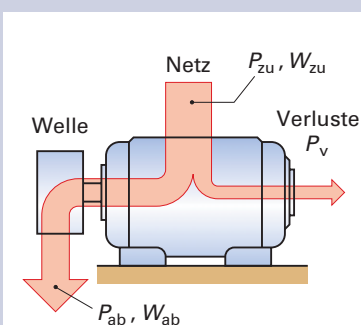
l Länge der schiefen Ebene

h Höhenunterschied

b Basislänge der schiefen Ebene

φ Neigungswinkel der schiefen Ebene

4.2 Wirkungsgrad, Arbeitsgrad



$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

$$\Rightarrow P_{zu} = \frac{P_{ab}}{\eta}; \quad P_{ab} = \eta \cdot P_{zu}$$

$$P_v = P_{zu} - P_{ab}$$

$$\Rightarrow P_{zu} = P_{ab} + P_v;$$

$$P_{ab} = P_{zu} - P_v$$

$$\zeta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}}$$

$$\Rightarrow W_{zu} = \frac{W_{ab}}{\zeta};$$

$$W_{ab} = \zeta \cdot W_{zu}$$

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \dots$$

$$\Rightarrow \eta_1 = \frac{\eta}{\eta_2 \cdot \eta_3 \dots}$$

$[P] = W$ (Watt)

$[W] = Ws$ (Wattsekunde)

η^* Wirkungsgrad (Leistungsverhältnis)

P_{zu} zugeführte Leistung (statt P_{zu} auch: P_1)

P_{ab} abgegebene Leistung (statt P_{ab} auch: P_2)

P_v Verlustleistung

ζ^{**} Arbeitsgrad, Nutzungsgrad (Arbeits-, Energieverhältnis)

W_{zu} zugeführte Energie

W_{ab} abgegebene Energie

η Gesamtwirkungsgrad

$\eta_1, \eta_2 \dots$ Einzelwirkungsgrade

* η griech. Kleinbuchstabe eta

** ζ griech. Kleinbuchstabe zeta