1 Allgemeines Rechnen

1.1 Rechnen mit Zahlen und Buchstaben

1.1.1 Begriffe, Zahlenarten

(Mathematische Zeichen siehe Tabelle 1.1)

Natürliche Zahlen 1; 2; 3; 4; …

Gebrochene Zahlen

Echte Brüche $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{24}$; …

Unechte Brüche $\frac{4}{3}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{12}{5}$; …

Unechte Brüche lassen sich in gemischte Zahlen verwandeln $\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$; $\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$; $\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$

Dezimalbrüche 0,6; 0,52; 0,389; …

Dezimalbrüche als gemischte Zahlen 3,72; 5,67; 4,83

Allgemeine Zahlen a; b; l; k; x; ...

Benannte Zahlen 5 km; 6 A; 7 V; 4 cm; …

1.1.2 Zahlen mit Vorzeichen

Vom Thermometer ist Bild 1.1 bekannt. In der Mathematik wird die gleiche Skala durch einen Zahlenstrahl dargestellt (Bild 1.2).

Dabei wird meistens bei den positiven Werten das Pluszeichen fortgelassen. Man unterscheidet also *positive* Zahlen und *negative* Zahlen.

Bild 1.1 Thermometerskala

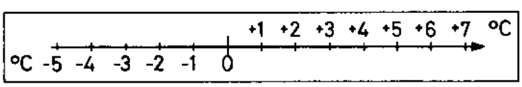

Bild 1.2 Zahlenstrahl

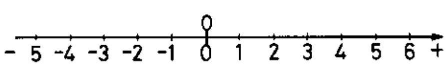

Tabelle 1.1 Mathematische Zeichen

Zeichen	Bedeutung – Sprechweise	
1. **Ordnungszeichen**		
1.	erstens	
…	und so weiter	
$r_1, r_2 \ldots r_n$	r – eins; r – zwei; r–n	
2. **Gleichheit; Ungleichheit**		
$=$	gleich	
$\neq$	nicht gleich; ungleich	
$\sim$	verhältnisgleich; proportional	
$\approx$	angenähert gleich; etwa; rund	
$\triangleq$	entspricht	
$<$	kleiner als	
$>$	größer als	
$\ll$	klein gegen; erheblich kleiner als	
$\gg$	groß gegen; erheblich größer als	
3. **Rechenvorgänge**		
$+$	plus	
$-$	minus	
$\cdot$	mal	
—	geteilt durch (gerader Bruchstrich)	
%	Prozent (geteilt durch hundert)	
‰	Promille (geteilt durch tausend)	
⟨[( )]⟩	spitze, eckige, runde Klammer	
$\sqrt{\ }$	Quadratwurzel aus; zweite Wurzel aus	
Σ	Summe	Werte, für die eines
Δ	Differenz	dieser Zeichen gilt,
Π	Produkt	sind in Klammern
∞	unendlich	zu setzen!
4. **Geometrische Zeichen**		
$\parallel$	parallel	
$\nparallel$	nicht parallel	
$\perp$	senkrecht auf	
$\sphericalangle$	Winkel	
∟	rechter Winkel	
$\overline{AB}$	Strecke von A nach B	
$\overset{\frown}{AB}$	Bogen von A nach B	
arc α	Bogen zum Winkel α; arcus α	

1.1.3 Rechenstufen

1. Rechenstufe: Addieren (Zusammenzählen)

$4 + 5; \quad x + y;$

Subtrahieren (Abziehen)

$6 - 2; \quad a - b;$

2. Rechenstufe: Multiplizieren (Malnehmen)

$5 \cdot 7; \quad a \cdot b$

Dividieren (Teilen)

$9 : 4; \quad c : b$ oder $\frac{9}{4}; \ \frac{c}{b}$

3. Rechenstufe: Potenzieren (gleiche Zahlen malnehmen)

$4^2; \quad b^3$

Radizieren (Wurzelziehen)

$\sqrt[2]{9}; \quad \sqrt[3]{b}$

Logarithmieren

${}^{2}\log 3; \quad {}^{10}\log 3$

(Nach DIN 1302 jetzt $\log_2 3$)

Diese Rechenstufen haben zueinander eine unterschiedliche Rangfolge. Enthält eine Aufgabe mehrere Stufen, so ist stets die Rechnung der höheren Rechenstufe vorrangig, d.h. zuerst auszuführen.

Verbreitet ist die Merkregel:
Potenzrechnung vor Punktrechnung
d.h. Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren vor Multiplizieren (·) und Dividieren (:).
Punktrechnung vor Strichrechnung
d.h. Multiplizieren (·) und Dividieren (:) vor Addieren (+) und Subtrahieren (–).

Soll dieser Grundsatz aufgehoben werden, setzt man eine Klammer. Zuerst wird dann der Wert in der Klammer berechnet. Ein Bruchstrich hat die gleiche Wirkung wie eine Klammer.

Beispiele zu den Rechenstufen:

$$\begin{array}{lll}
3 \cdot 4 + 5 = & \text{aber} & 3 \cdot (4 + 5) = \\
12 + 5 = \underline{17} & & 3 \cdot 9 = \underline{27} \\[1em]
6 + 4 \cdot 7 & \text{aber} & (6 + 4) \cdot 7 = \\
6 + 28 = \underline{34} & & 10 \cdot 7 = \underline{70} \\[1em]
6 \cdot 5^2 = & \text{aber} & (6 \cdot 5)^2 \\
6 \cdot 25 = \underline{150} & & 30^2 = \underline{900} \\[1em]
3^2 \cdot 4 = & \text{aber} & (3 \cdot 4)^2 \\
9 \cdot 4 = \underline{36} & & 12^2 = \underline{144} \\[1em]
6 + 4^2 = & \text{aber} & (4 + 6)^2 \\
6 + 16 = \underline{22} & & 10^2 = \underline{100} \\[1em]
_ = & \text{aber} & \frac{4 + 3}{2} = \\
2 + 3 = \underline{5} & & \frac{7}{2} = \underline{3{,}5} \\[1em]
\frac{120}{3} + \frac{120}{5} = & \text{aber} & \frac{120}{3 + 5} = \\
40 + 24 = \underline{64} & & \frac{120}{8} = \underline{15}
\end{array}$$

Enthält eine Aufgabe alle 3 Rechenstufen, muss stets mit der höchsten Stufe (Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren) begonnen werden.

$$\begin{array}{l}
6 + 3 \cdot 4^2 = \\
6 + 3 \cdot 16 = \\
6 + 48 = \underline{54}
\end{array}$$

Falls die Aufgabe in einer anderen Reihenfolge gelöst werden soll, sind Klammern zu setzen.

$$\begin{array}{lll}
(6 + 3) \cdot 4^2 = & \text{oder} & 6 + (3 \cdot 4)^2 = \\
9 \cdot 4^2 = & & 6 + 12^2 = \\
9 \cdot 16 = \underline{144} & & 6 + 144 = \underline{150}
\end{array}$$

Die drei letzten Beispiele zeigen deutlich, wie unterschiedlich das Ergebnis ausfallen kann.

Zur Festigung der Kenntnisse befindet sich nach der Behandlung der Grundrechenarten, jedoch vor Abschnitt 1.7 «Gleichungen» der Abschnitt 1.6 «Anwendung aller Rechenstufen in Formeln der Elektrotechnik».

1.1.4 Mehrfachklammern

In einigen Fällen sollen die Wirkungen mehrerer Rechenstufen durch Klammern verändert werden. Dann müssen mehrere Klammern gesetzt werden.

$$5 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 =$$
$$5 + 6 + 6 \cdot 4 =$$
$$5 + 6 + 24 = \underline{35}$$

aber: $[(4 + 3) \cdot (2 + 6) \cdot 2]^2 =$ Zunächst werden die inneren Klammern gelöst;
$[7 \cdot 8 \cdot 2]^2 =$ jetzt wird die eckige Klammer zusamengefasst.
$112^2 = \underline{12\,544}$

Zusätzlich zur eckigen Klammer verwendet man auch die geschweifte Klammer:

$$\{[(4 + 2) \cdot 3 + 4] \cdot 3\}^2 =$$
$$\{[6 \cdot 3 + 4] \cdot 3\}^2 =$$
$$\{[18 + 4] \cdot 3\}^2 =$$
$$\{22 \cdot 3\}^2 =$$
$66^2 = \underline{4356}$ Es wird stets die innere Klammer zuerst gelöst.

1.2 Grundrechenarten

1.2.1 Addieren (Zusammenzählen) und Subtrahieren (Abziehen)

Summand + Summand = Summe
Minuend – Subtrahend = Differenz
Die Reihenfolge der Summanden bei der Addition ist gleichgültig.

$2 + 4 + 6 = 12$ oder $6 + 2 + 4 = 12$

Es dürfen nur *gleichartige Mengen* zusammengefasst werden.

2 V + 3 V = 5 V
7 A + 5 A = 12 A
6 km – 2 km = 4 km

~~3 V + 7 A =~~
~~nicht möglich!~~

Sind natürliche und allgemeine Zahlen enthalten, gilt entsprechend:

$$5a + 3a = 8a$$
$$7b - 4b = 3b$$
$6b + 3a + 2b + 4a =$ |ordnen
$3a + 4a + 6b + 2b = \underline{7a + 8b}$ |zusammenfassen

Das ist das Ergebnis. Weiter lässt sich die letzte Aufgabe nicht vereinfachen.

Die folgenden Aufgaben enthalten negative Zahlen.

.

$+20 - 50 = -30$
$-30 + 40 = +10$
$-10 - 20 = -30$

Die positiven Vorzeichen können fortgelassen werden.

	$50 - 40 = 10$	
	$50 + (-30) =$	z B. 50 € Guthaben + 30 € Schulden
	$50 - 30 = \underline{20}$	= 20 € Guthaben
aber:	$-50 - (-30) =$	z.B. 50 € Schulden – 30 € Schulden
	$-50 + 30 \quad = \underline{-20}$	= 20 € Schulden

Wird eine «Plusklammer» aufgelöst, entfallen die Klammer und ihr Vorzeichen.

$6 + (-7) = 6 - 7 = \underline{-1}$

Wird eine «Minusklammer» aufgelöst, erhalten ihre Glieder entgegengesetzte Rechenzeichen.

$6 - (-7) = 6 + 7 = \underline{13}$

1.2.2 Multiplizieren (Malnehmen)

Faktor · Faktor = *Produkt*

Die Reihenfolge der Faktoren ist gleichgültig.

$4 \cdot 5 = 20$ oder $5 \cdot 4 = 20$; $2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$ oder $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$
$a \cdot b = b \cdot a$

Zwischen einer natürlichen und allgemeinen Zahl und zwischen allgemeinen Zahlen kann man das Malzeichen fortlassen, da eine Verwechslung nicht möglich ist,

$3 \cdot a = 3a$ $\qquad$ $4 \cdot b \cdot c = 4bc$

ebenfalls vor einer Klammer,

$3 \cdot (4 + 2) = 3\,(4 + 2)$ $\qquad$ $2 \cdot a \cdot (2 + 6) = 2a\,(2 + 6)$

jedoch *nicht* zwischen natürlichen Zahlen.

$2 \cdot 3 \neq 2\ 3$
$6 \quad \neq 20 + 3$ $\qquad$ $\neq$ bedeutet «ungleich»

Vorzeichen beim Multiplizieren

+ mal + wird + – mal – wird +	bei zwei *gleichen Vorzeichen* stets ein positives Ergebnis
+ mal – wird – – mal + wird –	bei zwei *verschiedenen Vorzeichen* stets ein negatives Ergebnis

$(+5) \cdot (+7) = +35$ oder $5 \cdot 7 = 35$
$(-7) \cdot (-8) = +56$ $\quad (-7) \cdot (-8) = 56$
$(+9) \cdot (-3) = -27$ $\quad 9 \cdot (-3) = -27$
$(-8) \cdot (+2) = -16$ $\quad (-8) \cdot 2 = -16$

Enthält eine Aufgabe mehr als 2 Faktoren, so gilt folgende Regel:
Ist die Anzahl der Minuszeichen gerade, so wird das Ergebnis positiv.

$$4 \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-4) =$$
$$4 \cdot (+6) \cdot (+8) = \underline{+192} \text{ (4 Minuszeichen)}$$

Ist die Anzahl der Minuszeichen ungerade, so wird das Ergebnis negativ.

$$4 \cdot (-3) \cdot (+2) \cdot (-2) \cdot (-4) =$$
$$4 \cdot (-6) \cdot (+8) = \underline{-192} \text{ (3 Minuszeichen)}$$

Weitere Beispiele:

$4a \cdot 5b =$ $\qquad (-6c) \cdot 3b =$
$4 \cdot a \cdot 5 \cdot b =$ $\qquad (-6) \cdot c \cdot 3 \cdot b =$
$4 \cdot 5 \cdot a \cdot b = \underline{20ab}$ $\qquad (-6) \cdot 3 \cdot c \cdot b = -\underline{18bc}$

Die Buchstaben werden gewöhnlich in alphabetischer Reihenfolge geschrieben.

$$(-26uc) \cdot (-2ba) =$$
$$(-26) \cdot u \cdot c \cdot (-2) \cdot b \cdot a =$$
$$(-26) \cdot (-2) \cdot u \cdot c \cdot b \cdot a = \underline{52abcu}$$

1.2.3 Dividieren (Teilen)

Dividend : Divisor = Quotient oder $\dfrac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \text{Quotient}$

Man sollte statt der Doppelpunkte nach Möglichkeit den Bruchstrich verwenden.

Die rationelle Herstellung von Schreibmaschinen- und Drucktexten hat in der Praxis zu der Schreibweise mit Schrägstrich geführt (z.B. 1/4, m/s^2 usw.). Bei technischen Berechnungen entstehen mit dieser Schreibweise jedoch leichter Fehler, da die Werte im Zähler und Nenner eines umfangreichen Bruches nicht mehr übersichtlich erkennbar sind.

Beim Dividieren gelten die gleichen Vorzeichenregeln wie beim Multiplizieren.

$\frac{+}{+}$ (+ durch +)	wird +	$\frac{+5}{+2} = +2{,}5$
$\frac{-}{-}$ (– durch –)	wird +	$\frac{-6}{-3} = +2$
$\frac{+}{-}$ (+ durch –)	wird –	$\frac{+8}{-2} = -4$
$\frac{-}{+}$ (– durch +)	wird –	$\frac{-9}{+3} = -3$

Durch Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor erhält man wieder den Dividenden. Die Aussage wird häufig als so genannte «Probe» angewendet.

$$\frac{10}{5} = 2 \qquad \text{denn} \qquad 5 \cdot 2 = 10$$

Die Division mit dem Divisor «Null» ergibt ein unbestimmtes Ergebnis (Quotient), denn die so genannte Probe ergibt nicht mehr den Dividenden.

$$\frac{6}{0} \to \infty \qquad \text{aber} \qquad \infty \cdot 0 = \text{unbestimmt},$$

denn eine Zahl mit «null» multipliziert, müsste «null» bleiben.

1.2.4 Bruchrechnen

Ein Bruch ist das Verhältnis $\frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}}$, hier werden jedoch die Bezeichnungen $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$ verwendet.

Ein Bruch kann erweitert und gekürzt werden:

erweitern = Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren.
kürzen = Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividieren.

erweitern: $\frac{6}{5} = \frac{6 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{18}{15}$ kürzen: $\frac{24}{36} = \frac{24 : 12}{36 : 12} = \frac{2}{3}$

$\frac{b}{a} = \frac{b \cdot c}{a \cdot c} = \frac{bc}{ac}$ $\frac{ts}{vs} = \frac{ts : s}{vs : s} = \frac{t}{v}$

1.2.4.1 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Brüche mit *gleichem Nenner* werden addiert, indem die Zähler addiert werden.

$$\frac{4}{9}+\frac{3}{9}=\frac{7}{9} \qquad \frac{4}{a}+\frac{3}{a}=\frac{7}{a}$$

$$\frac{5}{26}+\frac{24}{26}=\frac{29}{26}=1\underline{\frac{3}{26}} \qquad \frac{6}{a}+\frac{2b}{a}=\frac{6+2b}{a}$$

Bei *ungleichen Nennern* muss durch Erweitern oder Kürzen ein Hauptnenner gebildet werden. Im einfachsten Fall ist er das Produkt aus den beiden Teilnennern. Dieser «einfachste Fall» führt jedoch häufig zu unnötig großen Hauptnennern.

$$\frac{5}{8}+\frac{4}{3}=$$

$$\frac{5\cdot 3}{8\cdot 3}+\frac{8\cdot 4}{8\cdot 3}=$$

$$\frac{15}{24}+\frac{32}{24}=\frac{47}{24}$$

$$\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=$$

$$\frac{4\cdot y}{x\cdot y}+\frac{x\cdot 3}{x\cdot y}=$$

$$\frac{4y+3x}{x\cdot y}$$

$\frac{4}{9}+2=$ setze für 2 jetzt $\frac{2}{1}$ ein

$\frac{4}{9}+\frac{2}{1}=$ Hauptnenner 9 · 1 = 9

$$\frac{4}{9}+\frac{2\cdot 9}{1\cdot 9}=$$

$$\frac{4}{9}+\frac{18}{9}=\frac{22}{9}=2\underline{\frac{4}{9}}$$

$$\frac{a}{b}+c=$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{1}=$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b\cdot c}{b}=$$

$$\frac{a+bc}{\underline{b}}$$

Beim Subtrahieren gelten die gleichen Regeln wie beim Addieren.

$$\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{4-3}{7}=\frac{1}{7}$$

Bei gleichen Nennern können sofort die Zähler voneinander subtrahiert werden.

$$\frac{7}{9}-\frac{2}{5}=$$

Hauptnenner bilden (HN: 5 · 9 = 45), dann entsprechend erweitern.

$$\frac{7\cdot 5}{9\cdot 5}-\frac{2\cdot 9}{5\cdot 9}=\frac{35}{45}-\frac{18}{45}=\underline{\frac{17}{45}}$$

$$\frac{cd}{a}-\frac{2f}{b}-\frac{5c}{2}=$$

(HN: $2ab$)

$$\frac{2cdb}{2ab}-\frac{2a2f}{2ab}-\frac{5cab}{2ab}=$$

$$\frac{2bcd}{2ab}-\frac{4af}{2ab}-\frac{5abc}{2ab}=\underline{\frac{2bcd-4af-5abc}{2ab}}$$

1.2.4.2 Multiplizieren von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{9}=\frac{4\cdot 5}{6\cdot 9}=\frac{20}{54}=\underline{\frac{10}{27}}$$

Eine ganze Zahl denkt man sich als Bruch mit dem Nenner 1 $\left(\text{z.B. } 6=\frac{6}{1}\right)$

$$\frac{3}{9}\cdot 5=\frac{3}{9}\cdot\frac{5}{1}=\frac{3\cdot 5}{9\cdot 1}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}=\underline{1\frac{2}{3}}$$

Brüche werden mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man nur den Zähler mit dieser Zahl multipliziert.

$$\frac{3}{4}\cdot 7=\frac{3\cdot 7}{4}$$

Weitere Beispiele:

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{\cancel{4}\cdot 6\cdot 8\cdot 2}{9\cdot 7\cdot 5\cdot\cancel{4}}=\underline{\frac{96}{315}}$$

$$\frac{5a}{b}\cdot\frac{7b}{9}\cdot 2d=\frac{5a\cdot 7\cancel{b}\cdot 2d}{9\cdot\cancel{b}}=\underline{\frac{70ad}{9}}$$

1.2.4.3 Dividieren von Brüchen

Ein Bruch wird durch einen zweiten Bruch dividiert, indem man den ersten Bruch (Dividend) mit dem Kehrwert des zweiten Bruches (Divisor) multipliziert.

$$\frac{2}{8}:\frac{3}{7}=\frac{2}{8}\cdot\frac{7}{3}=\frac{14}{24}=\underline{\frac{7}{12}}\quad\text{oder}\quad\frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{7}}=\frac{2}{8}\cdot\frac{7}{3}=\frac{14}{24}=\underline{\frac{7}{12}}$$

Eine ganze Zahl denkt man sich als Bruch mit dem Nenner 1. Es gilt auch:
Brüche werden durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Nenner des Bruches mit dieser Zahl multipliziert.

$$\frac{2}{8}:9=\frac{2}{8}:\frac{9}{1}=\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{8\cdot 9}=\frac{2}{72}=\underline{\frac{1}{36}}$$

Gemischte Zahlen werden beim Dividieren und Multiplizieren in unechte Brüche verwandelt.

$$\frac{5}{9} : 2\frac{1}{4} = \frac{5}{9} : \frac{9}{4} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 9} = \underline{\underline{\frac{20}{81}}}$$

$$1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{2}{9} = \frac{7}{5} \cdot \frac{20}{9} = \frac{7 \cdot 20}{5 \cdot 9} = \frac{140}{45} = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$$

1.2.5 Dezimalbrüche und gemeine Brüche

Soll ein Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandelt werden, so ist der Dezimalbruch durch die entsprechende Zehnerzahl zu dividieren.

$$0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad\qquad 0{,}45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$$

Ein gemeiner Bruch wird in einen Dezimalbruch durch Division des Zählers durch den Nenner verwandelt.

$$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0{,}4 \qquad\qquad \frac{4}{7} = 4 : 7 = 0{,}5714\ldots$$

1.2.6 Auf- und Abrunden von Ergebnissen

Im Zuge der Anwendung des Taschenrechners erscheint das Ergebnis häufig bis zu 8 Ziffern genau (Ziffernumfang der Rechneranzeige). In der technischen Praxis wird die sinnvolle Genauigkeit der Rechenoperation durch die Exaktheit der vorgegebenen Zahlen (z.B. Messung von Strom und Spannung) oder die Möglichkeit der Beschaffung von Bauteilen (z.B. Widerstände) bestimmt.

Außerdem sollten in Zeichnungen die Maße nie genauer angegeben als bei der Fertigung erwünscht werden, weil sonst unnötig hohe Fertigungskosten entstehen.

Somit sollte das Endergebnis einer Aufgabe möglichst nur auf maximal 3 Ziffern genau angegeben werden. Aus diesem Grund wird die 4. Ziffer auf- oder abgerundet. Dazu gilt:
Ist die 4. Ziffer eine l; 2; 3 oder 4, so kann sie fortfallen.
Ist die 4. Ziffer eine 5; 6; 7; 8 oder 9, so erhöht sich die 3. Ziffer um einen Wert.

abrunden:			**aufrunden:**		
0,5714	≈	0,571	0,04276	≈	0,0428
47,63	≈	47,6	126,8	≈	127
127,249	≈	127	2837,5	≈	2840
2663	≈	2660	3,997	≈	4,00

Bei der Eingabe in den Rechner der Kreiszahl π, den Winkelfunktionen sin, cos, tan, einer Wurzel usw. sollten stets die entsprechenden Funktionstasten verwendet werden. Damit entfallen langwierige Zahlenkombinationen bei gleichzeitiger Exaktheit.

richtig: Betätigen der Taste «π»
unsinnig: Eingabe der Zahl 3,1 415 926

Beispiel: Der Durchmesser einer Welle wurde mit 25,9 mm mittels Messschieber ermittelt. Wie groß ist der Umfang der Welle?
Umfang $U = d \cdot \pi = 25{,}9\ \text{mm} \cdot \pi = 81{,}367\,248\ \text{mm}$ (Anzeige des Rechners)

Da der Wellendurchmesser nur mit einer Genauigkeit von 3 Ziffern ermittelt werden konnte, ist das Ergebnis entsprechend zu runden.

$$U = 81{,}367\,248\ \text{mm} = \underline{81.4\ \text{mm}}$$

1.3 Dreisatzrechnung – Prozentrechnung

1.3.1 Dreisatzrechnung (Schlussrechnung)

Sollen zwei voneinander abhängige Größen umgerechnet werden, kann das in drei Sätzen geschehen. Dabei unterscheidet man Aufgaben, in denen die Größen proportional zueinander stehen, und Aufgaben mit umgekehrter Proportionalität.

1.3.1.1 Proportionaler Dreisatz

4 Schalter kosten 12 €. Wie viel kosten 10 Schalter?

Frage:	10 Schalter kosten?	€
1. Satz (Es ist bekannt):	4 Schalter kosten	12 €
2. Satz (Beginn d. Rechnung):	1 Schalter kostet	$\frac{12}{4}$ €
3. Satz (Ergebnis):	10 Schalter kosten	$\frac{12 \cdot 10}{4}$ € = $\underline{30\ €}$

Um ein unnötiges Schreiben zu vermeiden und trotzdem die Aufgabe übersichtlich zu gestalten, sei folgende Schreibweise empfohlen:

10 Schalter	→	? €
4 Schalter	→	12 €
1 Schalter	→	$\frac{12}{4}$ €
10 Schalter	→	$\frac{12 \cdot 10}{4}$ € = $\underline{30\ €}$

In diesem Beispiel wachsen Preis und Stückzahl im gleichen Verhältnis (proportional).

1.3.1.2 Umgekehrt proportionaler Dreisatz

Beispiel 1: 15 Gesellen benötigen für eine Arbeit 4 Tage. Wie lange müssen an der gleichen Aufgabe 3 Gesellen tätig sein?

Frage:	3 Gesellen benötigen	? Tage
1. Satz (Es ist bekannt):	15 Gesellen benötigen	4 Tage
2. Satz (Beginn d. Rechnung):	1 Geselle benötigt	$4 \cdot 15$ Tage
3. Satz (Ergebnis):	3 Gesellen benötigen	$\frac{4 \cdot 15}{3} = \underline{20 \text{ Tage}}$

Hier hat das Sinken der Gesellenzahl ein Ansteigen der Tageszahl zur Folge. Daher spricht man von umgekehrter Proportionalität.

Beispiel 2: Ein Autofahrer benötigt für eine bestimmte Strecke 6 Stunden bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h. Wie schnell muss er fahren, damit er in 4 Stunden am Ziel anlangt?

Frage:	4 Stunden erfordern	? km/h
Bekannt:	6 Stunden erfordern	80 km/h
	1 Stunde erfordert	$6 \cdot 80$ km/h
Ergebnis:	4 Stunden erfordern	$\frac{6 \cdot 80 \text{ km}}{4 \text{ h}} = \underline{120 \text{ km/h}}$

> Man setze die zu berechnende Größe stets an das Ende des Fragesatzes!

Um den Aufbau eines Dreisatzes zu erleichtern, sollte man stets den Fragesatz an den Anfang einer Aufgabe stellen.

richtig: 4 Stunden erfordern ? km/h
falsch: ? km/h sind bei 4 Stunden erforderlich?

1.3.1.3 Doppelter Dreisatz

Beispiel 1: 4 Gesellen verlegen in 5 Tagen 600 m Leitungen.
Wieviel Meter werden von 2 Gesellen in 3 Tagen verlegt?

$$\begin{array}{lll}
& \text{Frage:} & 2 \text{ Gesellen} \rightarrow 3 \text{ Tagen} \rightarrow\ ? \\
\hline
& \text{Bekannt:} & 4 \text{ Gesellen} \rightarrow 5 \text{ Tagen} \rightarrow 600 \text{ m} \\
\text{1. Dreisatz} & & 1 \text{ Geselle} \rightarrow 5 \text{ Tagen} \rightarrow \dfrac{600}{4} \text{ m} \\
& & 2 \text{ Gesellen} \rightarrow 5 \text{ Tagen} \rightarrow \dfrac{600 \cdot 2}{4} \text{ m} \\
& & 2 \text{ Gesellen} \rightarrow 1 \text{ Tag} \rightarrow \dfrac{600 \cdot 2}{4 \cdot 5} \text{ m} \\
\text{2. Dreisatz} & & 2 \text{ Gesellen} \rightarrow 3 \text{ Tagen} \rightarrow \dfrac{600 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5} \text{ m} \\
& \text{Ergebnis:} & = 180 \text{ m}
\end{array}$$

In dem 1. Beispiel handelt es sich zweimal um einen proportionalen Dreisatz. Das folgende Beispiel 2 ist eine gemischte Aufgabe.

Beispiel 2: 6 Automaten fertigen in 10 Stunden 9000 Wicklungen. Wie viele Stunden benötigen 4 Automaten für 4500 Wicklungen?

$$\begin{array}{lll}
& \text{Frage:} & 4 \text{ Automaten} \rightarrow 4500 \text{ Wickl.} \rightarrow\ ? \text{ Stunden} \\
\hline
\text{1. umgekehrt proportionaler Dreisatz} & \text{Bekannt:} & 6 \text{ Automaten} \rightarrow 9000 \text{ Wickl.} \rightarrow 10 \text{ Stunden} \\
& & 1 \text{ Automat} \rightarrow 9000 \text{ Wickl.} \rightarrow 10 \cdot 6 \text{ Stunden} \\
& & 4 \text{ Automaten} \rightarrow 9000 \text{ Wickl.} \rightarrow \dfrac{10 \cdot 6}{4} \text{ Stunden} \\
\text{2. proportionaler Dreisatz} & & 4 \text{ Automaten} \rightarrow 1 \text{ Wickl.} \rightarrow \dfrac{10 \cdot 6}{4 \cdot 9000} \text{ Stunden} \\
& & 4 \text{ Automaten} \rightarrow 4500 \text{ Wickl.} \rightarrow \dfrac{10 \cdot 6 \cdot 4500}{4 \cdot 9000} \text{ Stunden} \\
& \text{Ergebnis:} & = \underline{7{,}5 \text{ Stunden}}
\end{array}$$

1.3.2 Prozentrechnung

Einen Anwendungsfall für die Dreisatzrechnung bietet die Prozentrechnung.
Prozent heißt: «Für oder von hundert.»

$$1 \text{ Prozent} = 1\% = 1 \text{ Teil von hundert} = \frac{1}{100}$$

$$37 \text{ Prozent} = 37\% = 37 \text{ Teile von hundert} = \frac{37}{100}$$

In der Prozentrechnung kennt man folgende drei Größen:

Prozentsatz		**Grundwert**		**Prozentwert**
30%	von	200 €	sind	60 €

Der *Grundwert* gibt das Ganze an, von dem ein Teil berechnet werden soll. Er ist immer 100% $\left(\frac{100}{100}\right)$ des Ganzen.

Der *Prozentsatz* gibt an, welcher Bruchteil genommen werden soll.
Der *Prozentwert* gibt an, welchen Wert der Bruchteil hat.

Zwischen diesen 3 Größen besteht folgender Zusammenhang:

$$\boxed{\text{Prozentwert} = \frac{\text{Grundwert} \cdot \text{Prozentsatz}}{100}}$$

Diese Formel sollte man sich jedoch nur dann einprägen, wenn sie häufig angewendet werden muss. Einfacher, wenn auch mit etwas mehr Schreibarbeit verbunden, ist die Berechnung mit Hilfe der Dreisatzrechnung.

Beispiel l: (gesucht wird der Prozentwert):
Ein Kühlschrank kostet 320 € und wird um 30% billiger verkauft. Wie groß ist der Preisnachlass in €?

$$\begin{array}{lrr}
\text{Frage:} & 30\% \text{ von } 320\ € \mathrel{\hat{=}} & ?\ € \\
\hline
\text{Bekannt:} & 100\% \mathrel{\hat{=}} & 320\ € \\
 & 1\% \mathrel{\hat{=}} & 3{,}20\ € \\
 & 30\% \mathrel{\hat{=}} 3{,}20\ € \cdot 30 = & \underline{96\ €}
\end{array}$$

Ergebnis: Der Preisnachlass beträgt 96 €.

Beispiel 2: (gesucht wird der Prozentsatz):
Der Spannungsfall auf der Leitung beträgt 12 Volt bei einer Nennspannung von 200 Volt. Wie viel Prozent Verlust treten auf?

$$\begin{array}{l}
\text{12 Volt sind ?\% von 200 V} \\
\hline
200\ \text{V} \mathrel{\hat{=}} 100\% \\
1\ \text{V} \mathrel{\hat{=}} \frac{100}{200}\% \\
12\ \text{V} \mathrel{\hat{=}} \frac{100 \cdot 12}{200}\% = \underline{6\%}
\end{array}$$